Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15min}}$*; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On observe une population de bactéries. On suppose que l'âge T d'une bactérie choisie au hasard a pour densité la fonction

$$f : t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ k\, 2^{1-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

(1) Calculer k et déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

(2) Quelle est la probabilité que l'âge d'une bactérie choisie au hasard soit compris entre 0 et $1/2$?

(3) On admet que la masse d'une bactérie est une fonction affine de son âge : $M = m_0(1+T)$, pour un certain $m_0 \in \mathbf{R}_+^\star$. Calculer l'espérance de la masse d'une bactérie choisie au hasard.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée, et soit $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ une matrice colonne. On s'intéresse à la question suivante : existe-il une unique matrice colonne $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout matrice ligne $Y \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, on ait $YMX = YB$?

(1) On suppose que la matrice M n'est pas inversible.

(1a) Constuire un exemple où il n'est pas possible de trouver un X qui convient.

(1b) Montrer que, dans le cas où X existe, X n'est pas unique, c'est-à-dire qu'on peut trouver d'autres solutions.

On suppose désormais que M est inversible.

(2) Démontrer que X répond à la question si et seulement si $X = M^{-1}B$.

(3) Montrer qu'on peut remplacer la question par : existe-il une unique matrice colonne $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que, pour tout matrice ligne $Y \in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, on ait $YM^{\mathrm{T}}MX = YM^{\mathrm{T}}B$?

On rappelle que M^{T} est la transposée de la matrice M.

(4) On introduit la fonction $\varphi : \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(Z) = \frac{1}{2} Z^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} MZ - Z^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} B.$$

On note X la solution du problème. Montrer que

$$\forall Z \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \qquad \varphi(X+Z) \geq \varphi(X).$$