Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On définit l'application φ sur l'ensemble des couples de matrices ayant la même taille par

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{ij} \, ,$$

où l'on a utilisé les notations $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$.

(1) Montrer que $\varphi(A, A) = 0$ si et seulement si la matrice A est nulle.

(2) Soient $A \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, $P \in \mathbf{M}_{q,r}(\mathbf{R})$ et $Q \in \mathbf{M}_{p,r}(\mathbf{R})$. Montrer que $\varphi(AP, Q) = \varphi(P, A^{\mathrm{T}} Q)$.

(3) Pour $A, B \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$, montrer que $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}}) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}} B)$.

(4) En déduire une nouvelle démonstration, moins calculatoire, du résultat de la question *(2)*.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. On considère un entier $n \geq 1$ et une fonction polynômiale de la forme

$$p : x \mapsto x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où on suppose $a_0 \neq 0$. On introduit la fonction $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, x^k.$$

(1) Montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = -\dfrac{H(x)}{x^n}$ est strictement décroissante.

(2) Déterminer ses limites quand x tend vers 0 et x tend vers $+\infty$.

(3) En déduire que H s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}_+$.

On note α le réel positif tel que $H(\alpha) = 0$.

(4) On suppose que $p(x_0) = 0$. Montrer que $|x_0| \leq \alpha$.

(5) On note $A = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, on a $H(x) \geq x^n - A \, \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

(6) En déduire que $\alpha \leq A + 1$.