Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $n+1$ boîtes, numérotées de 0 à n. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, la boîte numérotée k contient k boules rouges et $n-k$ boules bleues. On choisit une boîte uniformément au hasard, c'est-à-dire que chaque boîte a une probabilité $\frac{1}{n+1}$ d'être sélectionnée. Ensuite, on tire uniformément au hasard une boule dans cette boîte. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note B_k l'événement « la boîte numéro k a été tirée », ainsi que R l'événement « une boule rouge a été tirée ».

(1) Déterminer $\mathbb{P}(R)$.

(2) Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Les événements R et B_k sont-ils indépendants ?

(3) Déterminer la probabilité qu'on ait sélectionné la boîte numéro n sachant qu'on a tiré une boule rouge.

(4) On note X le nombre de boules rouges que contient la boîte qu'on a tiré au hasard. Déterminer $\mathbb{E}[X]$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. À toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on associe la matrice de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$M_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère une fonction f, continue en 0, et qui vérifie la propriété

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad M_f(x+y) = M_f(x) M_f(y). \tag{$\star$}$$

(1) *(1a)* Traduire $(\star)$ en une équation sur f.

(1b) Que vaut $f(0)$?

(1c) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

(1d) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Indication. On pourra intégrer l'équation trouvée en *(1a)* par rapport à y.

(2) Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont continues en 0 et vérifient la propriété $(\star)$.