

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1.

(1) Soient $a > 0$ et $c \leq 0$ deux nombres réels. On considère la fonction

$$f_{a,c} : b \mapsto \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(1a) Tracer le graphe de la fonction $f_{a,0}$.

(1b) Déterminer les asymptotes de $f_{a,c}$ quand $b \rightarrow +\infty$ et $b \rightarrow -\infty$.

(2) Soit $b > 0$ et $c \neq 0$ deux réels fixés.

(2a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$g_{b,c} : a \mapsto \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2b) Montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} g_{b,c}(a) = -\frac{c}{b}$.

(2c) On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Qu'a t-on montré à la question précédente sur cette fonction? Est-ce surprenant?

Exercice 2. On s'intéresse au jeu suivant. Une première joueuse lance un dé à n faces qui donne son score, que l'on note X . Une seconde joueuse lance deux dés à n faces, dont la somme donne son score, noté Y . Les dés sont équilibrés et les lancers sont mutuellement indépendants. La personne qui fait le plus haut score gagne; il y a match nul en cas d'égalité.

(1) Donner la loi de X et celle de Y .

(2) Déterminer la probabilité qu'il y ait égalité. Vérifier votre résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

(3) Déterminer la probabilité que $X > Y$. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

(4) On sait qu'il n'y a pas eu d'égalité. Quelle est la probabilité que la première joueuse ait gagné?