Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On dit qu'une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifie la propriété $\mathbf{P}$ si

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ \forall a \in [0,1], \qquad af(x) + (1-a)f(y) \leq f(ax + (1-a)y)\,.$$

(1) Soit f une fonction vérifiant la propriété $\mathbf{P}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et tous réels positifs $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right).$$

Soient $a \in [0,1]$ et $y > 0$ des réels fixés. On considère la fonction $g :]0, y] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \ln(ax + (1-a)y) - a\ln(x) - (1-a)\ln(y)\,.$$

(2) Dresser le tableau de variation de g.

(3) En déduire que la fonction $\ln$ vérifie la propriété $\mathbf{P}$.

(4) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels tous strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k^{\frac{1}{x_k}}\,.$$

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère l'expérience aléatoire suivante. On tire d'abord un entier naturel $\mathcal{I}$ selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Puis on tire un réel uniformément au hasard dans l'intervalle $[\mathcal{I}, \mathcal{I}+1]$. On note Y le résultat obtenu.

(1) *(1a)* Déterminer la fonction de répartition de Y.

(1b) Cette fonction est-elle continue ? Est-elle dérivable ?

L'entier $\mathcal{I}$ étant toujours tiré selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on choisit maintenant un réel, noté X, uniformément dans l'intervalle $[0, \mathcal{I}+1]$.

(2) *(2a)* Montrer que, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\min(t, k+1)}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

(2b) Calculer cette somme lorsque $0 \leq t \leq 1$.