Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) Soient a et b deux réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a - a^2 & -ab \\ -ba & b - b^2 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Soient n réels strictement positifs $d_1, d_2, \dots, d_n$. On note $S = \sum_{k=1}^{n} d_k$ et on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} d_1 - d_1^2 & -d_1d_2 & -d_1d_3 & \cdots & -d_1d_n \\ -d_1d_2 & d_2 - d_2^2 & -d_2d_3 & \cdots & -d_2d_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1}d_n \\ -d_nd_1 & \cdots & \cdots & -d_nd_{n-1} & d_n - d_n^2 \end{pmatrix}.$$

On admet que, pour toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, on a

$$X^{\mathrm{T}}MX = \sum_{k=1}^{n} d_k(1-S)x_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_id_j(x_i - x_j)^2.$$

(2) Si $S < 1$, montrer que la matrice est inversible.

(3) Si $S = 1$, calculer le noyau de la matrice M.

(4) Démontrer le résultat admis par l'énoncé.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse à la loi d'une variable aléatoire notée X qui donne la note obtenue à un examen par un·e étudiant·e tiré·e au hasard dans une population. On suppose que cette population est constituée de deux sous-populations : les étudiant·es ayant révisé et les étudiant·es n'ayant pas révisé. On suppose que la note d'un·e étudiant·e ayant révisé suit un loi normale de moyenne μ_A et de variance σ_A^2 et que celle d'un·e étudiant·e n'ayant pas révisé suit une loi normale de moyenne μ_B et de variance σ_B^2, avec $\mu_A > \mu_B$. On note $p \in \,]0,1[$ la proportion d'étudiant·es de la population ayant révisé.

(1) Montrer que la variable aléatoire X peut s'écrire

$$X = YZ + (1-Y)Z'$$

où Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Z et Z' sont indépendantes de Y.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[X] = p\mu_A + (1-p)\mu_B$.

(3) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X et montrer que X possède une densité. Tracer l'allure de cette densité.

(4) Calculer la variance de X et montrer que $\mathbb{V}[X] > p\sigma_A^2 + (1-p)\sigma_B^2$.