Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90min; l'interrogation durera 30min environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15min; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10min si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15min.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

(1a) Montrer que A est inversible.

(1b) Résoudre le $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$.

(1c) Un calcul donne $A \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. En quoi cela peut-il paraître surprenant ?

(2) Soit maintenant $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls. Soient deux matrices colonne $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $R \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On note X et $\tilde{X}$ les solutions de

$$AX = B \qquad \text{et} \qquad A\tilde{X} = B + R.$$

Pour une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque, on note $\|Y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

(2a) Montrer que

$$\max_{1 \le k \le n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\min\limits_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}.$$

(2b) Montrer que

$$\frac{\|X - \tilde{X}\| \, \|B\|}{\|R\| \, \|X\|} \le \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}{\min\limits_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}.$$

(2c) La matrice A étant fixée, construire explicitement B et R pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif et soient n^2 variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, …, X_{n^2} suivant la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(1) *(1a)* Déterminer $p_n = P(X_1 X_2 \cdots X_n > 0)$.

(1b) Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(2) *(2a)* On note $q_n = P(X_1 X_2 \cdots X_{n^2} > 0)$. Exprimer q_n en fonction de p_n.

(2b) Donner un équivalent de q_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(3) Montrer que $\mathbb{E}\left[X_1 X_2 \cdots X_{n^2}\right]$ tends vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.