

# Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

## ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2022

*Nina Aguilon, Jérémie Bettinelli, Clémentine Courtès, Igor Kortchemski*

Durée : 4 heures

calculatrice interdite

### 1 Commentaires généraux

**Structure du sujet.** Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à proposer aux candidates et candidats des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates pour leur permettre de se distinguer. En particulier, le sujet était calibré de sorte à ce que les candidates et candidats les plus à l'aise en mathématiques puissent avoir le temps d'aborder la quasi-totalité des questions et de s'attarder sur les questions délicates, généralement placées en fin de problèmes.

**Bilan général.** Le sujet a permis de bien classer les copies, y compris pour les faibles notes. La présence de nombreuses questions simples permet aux candidates et candidats les moins à l'aise en mathématiques de traiter une partie du sujet et d'obtenir quelques points, les récompensant de leur investissement en mathématiques. Nous leur conseillons donc de ne pas se censurer et de traiter ce qui est à leur portée. Nous demeurons très satisfaits du niveau des meilleures copies qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi une bonne maîtrise de toutes les parties du programme.

**Notation.** Nous utilisons dans la mesure du possible la notation figurant au programme officiel ; ainsi les ensembles de nombres sont notés  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{R}$ , etc., les probabilités et espérances respectivement  $P$  et  $E$ . Les personnes utilisant sur leur copie des notations usuelles différentes ne sont en aucun cas pénalisées. Nous rappelons que les lettres grecques sont couramment utilisées en mathématique et invitons les candidates et les candidats à en connaître leur graphie, que nous rappelons ici.

$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \varepsilon \zeta \eta \theta \vartheta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \varpi \rho \varrho \sigma \varsigma \tau \upsilon \phi \varphi \chi \psi \omega$

$\Gamma \Delta \Theta \Lambda \Xi \Pi \Sigma \Upsilon \Phi \Psi \Omega$

Nous ne pénalisons pas les graphies plus ou moins approximatives et invitons les candidates et candidats à ne pas se formaliser si d'aventure un symbole n'est pas reconnu, et à simplement essayer de le reproduire sur leur copie au besoin.

## 2 Système de notation

**Notes brutes et difficulté du sujet.** Chaque question du sujet a été notée par un nombre entier allant de 0 à 4, puis pondérée par un facteur allant de 0.5 à 2. La note brute correspond alors au quart de la somme pondérée; la note brute maximale ainsi possible était de 64 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 55.9 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas.

Le bonus/malus de 2 points sur la note brute a été reconduit cette année pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions brouillonnes, malhonnêtes, imprécises. On obtient ainsi la distribution suivante des notes brutes, avec une moyenne de 19.5 et une médiane de 18.2.

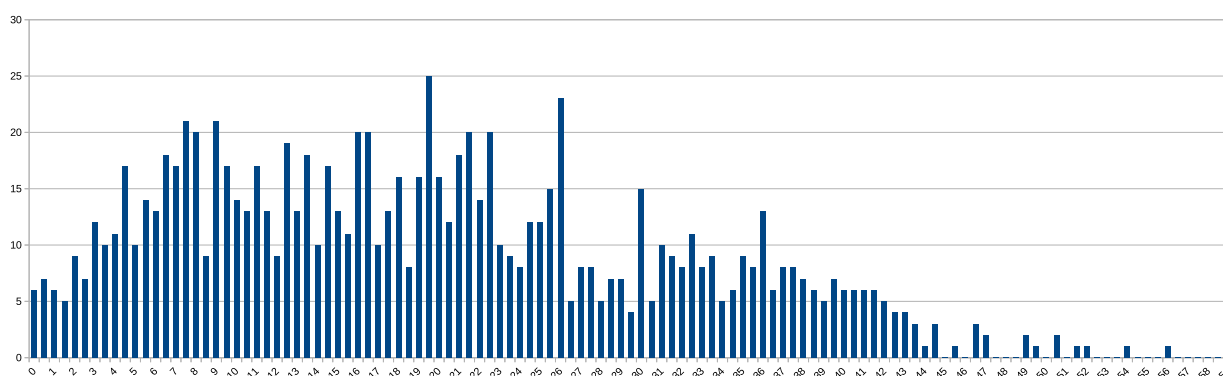


FIGURE 1 – Distribution des notes brutes.

Nous avons par ailleurs estimé pour chaque question son niveau de difficulté : de 1 pour les questions de cours ou de calculs numériques élémentaires jusqu'à 4 pour les raisonnements plus fins et les questions difficiles.

question	1	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	6a	6b	7a	7b	8a	8b
(coefficient)	2,0	0,5	1,5	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,5	1,0	1,0	1,5	1,0	0,5	0,5
difficulté	1	1	1	1	3	4	1	2	1	3	2	1	1	1	2	4	4	2
moyenne	2,5	2,8	2,2	2,4	1,8	0,4	3,5	2,6	3,5	0,9	2,1	2,3	2,5	2,0	2,2	0,5	1,4	2,6
≥ 0/4 (en %)	82	75	68	50	37	16	74	70	63	56	33	51	46	32	29	10	23	28
≥ 2/4 (en %)	49	53	36	32	18	1	65	44	53	6	17	34	26	17	18	1	7	18
≥ 3/4 (en %)	49	42	34	27	14	1	62	42	52	1	15	25	24	12	15	1	6	14

question	9a	9b	10a	10b	11	12a	12b	12c	12d	12e	13a	13b	13c	13d	14a	14b
(coefficient)	2,0	0,5	1,5	0,5	1,0	0,5	2,0	0,5	2,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0
difficulté	1	1	2	1	1	2	2	1	3	2	1	3	2	4	4	2
moyenne	3,4	3,3	3,1	3,3	1,9	2,5	2,6	3,5	2,4	3,1	3,0	1,5	2,9	0,6	1,1	1,2
≥ 0/4 (en %)	89	82	73	69	73	93	88	83	72	48	59	32	44	21	24	11
≥ 2/4 (en %)	76	68	54	55	45	66	61	77	54	37	53	12	32	2	4	3
≥ 3/4 (en %)	73	65	52	53	8	40	53	67	28	34	45	10	27	2	4	2

question	15a	15b	15c	15d	15e	16	17a	17b	17c	17d	18a	18b	19a	19b	19c	19d	20a	20b	21a	21b	22
(coefficient)	1,0	1,5	1,0	2,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0
difficulté	1	1	3	2	3	1	2	2	2	4	2	2	2	1	3	4	1	3	2	2	4
moyenne	3,1	2,8	1,5	2,3	1,3	2,3	3,0	2,9	2,1	0,9	3,1	2,1	2,5	3,6	1,8	0,2	3,3	1,2	2,3	1,2	0,2
≥ 0/4 (en %)	95	85	60	82	72	40	47	35	42	31	62	48	71	83	42	27	54	42	20	7	2
≥ 2/4 (en %)	82	69	25	48	22	26	35	25	21	4	50	28	56	75	22	1	46	10	11	2	0
≥ 3/4 (en %)	62	46	17	42	16	21	33	23	18	2	46	24	32	73	12	1	42	6	9	2	0

FIGURE 2 – Statistiques brutes question par question.

Nous indiquons dans le tableau précédent pour chaque question le coefficient appliqué, le niveau de difficulté que l'on a estimé, la moyenne sur 4 obtenue par les candidates et candidats ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

Notons que les premières questions, pourtant très basiques, ont été fortement valorisées afin de distinguer les candidates et candidats ayant fourni un investissement en mathématiques. Ainsi, la parfaite résolution des questions de difficulté 1 permettait d'obtenir la note brute de 21, celle des questions de difficulté 1 ou 2 la note brute de 42. Après transformation, ces notes correspondent respectivement aux notes finales de 11.5 et 17.

**Notes finales sur 20.** Traditionnellement, afin d'obtenir une répartition de notes similaire à celle des autres matières, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20. Depuis quelques années, le jury vise à ce que cette transformation soit la plus proche possible d'une transformation linéaire (c'est-à-dire avec un seul morceau), en faisant en sorte que l'étalement des notes soit obtenu directement sur les notes brutes.

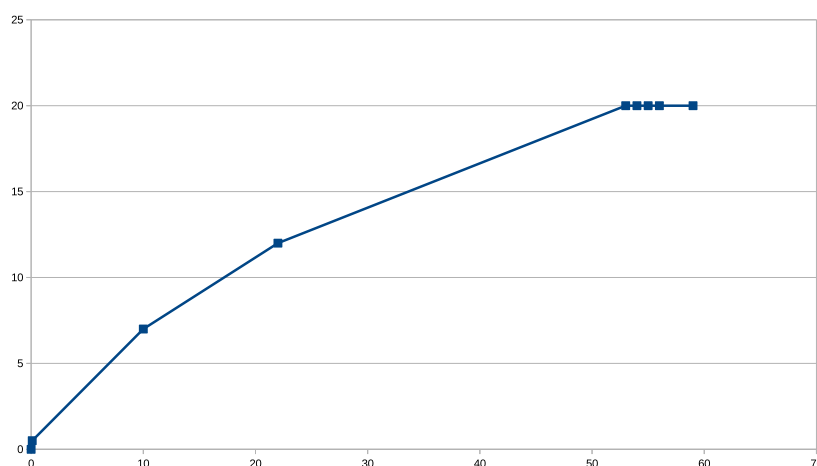


FIGURE 3 – Transformation linéaire par morceaux.

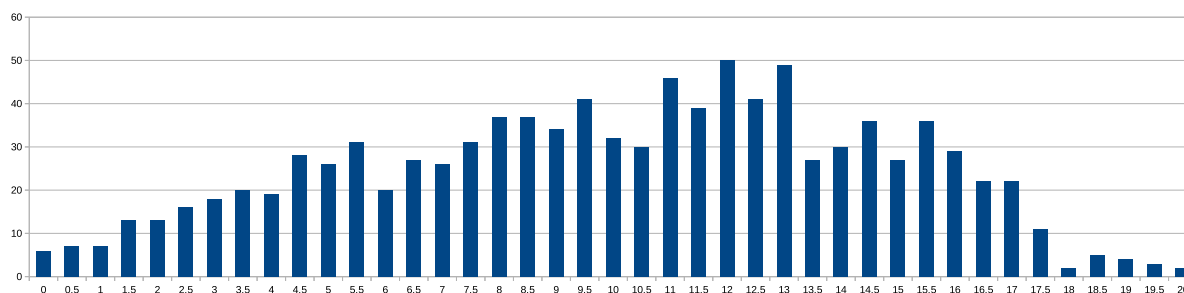


FIGURE 4 – Distribution des notes après transformation.

Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenues de faibles notes tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. Le décrochement au niveau de 0

permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Ainsi les 6 copies ayant obtenu la note finale de 0 sont exactement celles qui ont obtenu la note brute de 0.

Sur les notes finales, la moyenne est 10.1, la médiane est 10.5 et l'écart-type est 4.41.

### 3 Conseils aux candidates et candidats

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour donner aux futures candidates et futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

**Honnêteté.** Il est très appréciable de voir les candidates et candidats aborder de nombreuses questions. Toutefois, nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidates et candidats tout au long de la copie, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les personnes candidates sont également invitées à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, les candidates et candidats ont intérêt à la signaler. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu'une copie malhonnête.

**Rédaction.** L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses et valorisées, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidates et candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à celles et ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidates et candidats les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au jury que le candidat a trouvé une démonstration *complète, concise, sans argument erroné*, n'utilisant que des résultats au programme et répondant bien à la question posée.

- **Ambiguïté ou démonstration incomplète.** Une candidate ou un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question (5), il fallait évoquer l'indépendance des variables aléatoires.

De plus, il faut toujours mentionner un résultat prouvé dans une question précédente **au moment où on l'utilise. Il n'est pas nécessaire d'indiquer qu'on admet une question qu'on n'arrive pas à démontrer.** Ce qui est nécessaire est d'indiquer clairement les résultats des questions précédentes que l'on utilise, peu importe si on a réussi ou non à les démontrer. Par exemple, en (13c), même sans avoir traité (13b), on peut dire «  $x_0(V) \geq 0$  et, d'après la question (13b),  $x_0(V) \leq Vb\sqrt{1+b^2}$ . Comme  $Vb\sqrt{1+b^2} \rightarrow 0$ , par encadrement, on déduit que  $x_0(V) \rightarrow 0$  ».

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

- **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. Nous n'avons pas noté cette année d'erreur récurrente de ce type.
- **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peuvent être résolues à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidates et candidats capables de mettre cet argument en évidence par rapport à celles et ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Nous encourageons enfin les candidates et candidats à ne pas faire figurer plusieurs réponses à une question, notamment si l'une est fautive car elle pénalisera très fortement l'autre.
- **Arguments erronés.** Énoncer une affirmation manifestement fautive ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.
- **Rédaction et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition presque complète de signes cabalistiques ou notations non-standards; nous encourageons vivement les futures candidates et futurs candidats à poursuivre cet effort.
- **Orthographe, erreurs de calcul.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières. Ainsi, une probabilité qui n'est clairement pas entre 0 et 1 indique toujours une erreur.
- **Présentation de la copie.** Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidates et candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant. Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme fautive. Nous rappelons également que la copie rendue n'est pas un brouillon. Quand plusieurs pistes ont été poursuivies, celles qui ont été abandonnées doivent être clairement rayées.

**Forme.** Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie fortement que les réponses soient présentées dans l'ordre, et qu'en tout cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire (en cas d'oubli et de manque de place), ce qui doit rester exceptionnel.

Bien séparer les différents problèmes, sur des copies différentes par exemple, est une bonne initiative, notamment pour pouvoir par la suite revenir à un problème commencé mais non terminé.

Il est également demandé que **les conclusions soient mises en valeur** par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Il est demandé de respecter les numérotations des questions ((1a), (1b), (2a), etc.) et il est apprécié que **ces numérotations soient également mises en valeur** (en retrait dans la marge, encadrées, en couleur, etc.) car il est courant pour les correctrices et correcteurs d'avoir à revenir en arrière sur une copie ou de revenir sur une copie précédemment corrigée et il est important de pouvoir facilement identifier la question recherchée. La numérotation continue entre les problèmes a d'ailleurs été adoptée dans ce but. Nous sommes heureux de constater les efforts dans la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

**Il n'est pas souhaitable de recopier l'énoncé.** En plus de faire perdre du temps aux candidates et candidats, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner pour les correctrices et correcteurs.

Depuis quelques années, les copies sont numérisées. Cela implique d'utiliser des stylos noirs ou bleus. Néanmoins, pour la mise en lumière des résultats ou des numéros de questions, nous avons observé que souligner ou encadrer à l'aide de n'importe quelle couleur passait bien au scanner et ne posait aucun problème de lecture. Nous encourageons donc les candidates et candidats à continuer ainsi. Attention toutefois à ne pas utiliser de crayon de papier, notamment pour les illustrations (graphes, tableaux, etc.), car cela ne passe pas très bien.

**Lecture du sujet.** Nous invitons les candidates et candidats à bien lire le sujet pour éviter des erreurs grossières. Il est courant de traiter d'un problème général et de regarder des cas particuliers ou des exemples. Utiliser les cas particuliers en dehors des questions concernées est dommageable. Nous avons veillé à bien insister dans le sujet sur ce point et n'avons observé que de rares confusions cette année.

## 4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies.

- La linéarité de l'espérance est souvent confondue avec la propriété que l'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances.
- En règle générale, beaucoup de candidates et candidats estiment que toute fonction admet une limite en tout point. Ainsi, en (13c), on a souvent lu que  $x_0(V) \leq Vb \sqrt{1+b^2} \rightarrow 0$  impliquait  $\lim x_0 \leq 0$ , puis, comme  $x_0(V) \geq 0$ ,  $\lim x_0 \geq 0$ , et donc  $\lim x_0 = 0$ .
- On a noté quelques erreurs sur des notions de logique élémentaire (implication, équivalence).
- Il ne convient pas d'utiliser la locution « par définition » lorsqu'il ne s'agit pas d'une définition.
- Nous avons vu des probabilités clairement hors de  $[0, 1]$ .
- Nous avons vu des fonctions racine carré linéaires.

## 5 Commentaires détaillés

Détaillons à présent, question par question, les erreurs les plus fréquentes, dans un but pédagogique.

### PROBLÈME A.

- (1) De nombreuses copies indiquent que  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .
- (2) (2a) Cette question a été plutôt bien réussie par les copies l'ayant abordée.  
(2b) Un nombre conséquent de copies obtient une loi qui n'est pas de probabilité.  
(2c) Cette question a été bien traitée par les copies ayant réussi la question (2a). Rappelons qu'il est inutile d'invoquer l'indépendance pour la linéarité de l'espérance.
- (3) (3a) Il s'agissait de bien justifier toutes les hypothèses lors de l'application de l'inégalité de Markov.  
(3b) Question difficile, utilisant la loi faible des grands nombres, comprise seulement dans les toutes meilleures copies.
- (4) (4a) Dans ces questions, il fallait donner quelques éléments de justification, par exemple  
(4b) avec un arbre de probabilité ou en exprimant les événements considérés en fonction des tirages.  
(4c)  
(4d) Cette question a posé de nombreuses difficultés : il s'agissait de réaliser qu'il s'agissait d'une probabilité conditionnelle, puis de la calculer.  
(4e) Il fallait ici aussi donner quelques éléments de justification, par exemple avec un arbre de probabilité ou en exprimant les événements considérés en fonction des tirages.
- (5) Il s'agissait d'un calcul explicite utilisant la formule de transfert. De nombreuses erreurs de calcul ont été commises.
- (6) (6a) Quelques erreurs dans les indices sont à signaler.  
(6b) Question globalement bien traitée par les copies ayant réussies les questions précédentes.
- (7) (7a) La manipulation des logarithmes a posé des difficultés à un nombre non négligeable de copies.  
(7b) Comme la question (4d), il s'agit d'une question difficile, comprise seulement dans les toutes meilleures copies.
- (8) (8a) Il fallait citer des résultats mathématiques précis établis dans les questions précédentes pour mettre en lumière un aspect paradoxal.

(8b) Comme indiqué dans l'énoncé, une justification brève était nécessaire ici.

### PROBLÈME B.

(9) (9a) Les propriétés de la fonction racine carré ont été mal traitées dans certaines copies.

(9b) Cette question a été plutôt bien réussie par les copies qui l'ont traitée.

(10)(10a) Il s'agissait de remarquer que les points particuliers  $A$  et  $B$  appartenaient à la droite recherchée.

(10b) Il fallait déduire le résultat directement de la question (10a) en remarquant que les coordonnées du point  $I$  vérifiaient l'équation de la droite donnée.

(11) Question bien traitée dans l'ensemble. Précisons qu'une justification, même très brève, était souhaitée.

(12)(12a) Question simple pourtant moins bien réussie qu'escompté. Il s'agissait essentiellement de justifier que la fonction sous la racine carrée était à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ , ensemble sur lequel la racine carrée est bien dérivable.

(12b) Erreurs de calcul assez fréquentes, notamment sur la seconde racine carrée. Trop peu de copies ont pensé à utiliser l'expression de la dérivée seconde fournie dans l'énoncé pour vérifier leur réponse à cette question.

(12c) Un nombre non négligeable de copies a confondu fonction croissante et fonction strictement croissante.

(12d) Il fallait utiliser le théorème des fonctions intermédiaires en vérifiant au préalable que toutes les hypothèses étaient satisfaites.

(12e) Question bien traitée par les copies ayant réussi la question (12d).

(13)(13a) Il fallait partir de l'inégalité vérifiée par  $x_0(V)$ , à savoir  $0 \leq x_0(V) \leq b$ . Question bien réussie dans la plupart des copies.

(13b) Question peu réussie avec beaucoup de tentatives de justification plus ou moins honnêtes. Il fallait repartir de l'expression de l'énoncé définissant  $x_0(V)$ .

(13c) Question bien réussie dans la plupart des copies.

(13d) Question plus difficile, nécessitant de revenir à la définition de  $x_0(V)$  donnée dans l'énoncé. Question rarement bien réussie. L'existence de la limite n'a été que très peu justifiée et il y a eu beaucoup de confusions entre majoration et existence d'une limite.

(14)(14a) Question difficile, assez peu traitée. Il fallait revenir à la définition d'une fonction dérivable en 0 par limite du taux d'accroissement.

(14b) Question très peu traitée avec un développement limité souvent erroné. Une réponse partielle pouvait être donnée, même sans avoir traité toutes les questions précédentes.



**PROBLÈME C.**

- (15)(15a) Les erreurs de calculs ont été sévèrement pénalisées dans cette question.
- (15b) Cette question testait d'une part la connaissance de la définition du noyau, souvent correcte, et d'autre part sa détermination, ce qui a posé plus de problème.
- (15c) Question peu réussie car la plupart des candidats et candidates n'ont pas su utiliser correctement l'hypothèse  $\lambda \neq 0$ . Les arguments du type « la petite matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  se retrouve dans  $G$  » n'ont pas été acceptés.
- (15d) Une moitié des personnes ayant traité cette question ne mène pas les calculs de manière satisfaisante.
- (15e) Question de synthèse plutôt difficile. Une bonne partie des candidates et candidats n'a pas vu que 0 est valeur propre. On a souvent vu des recherches de vecteurs propres aboutissant sur le vecteur nul, sans que cette incohérence ne soit soulignée.
- (16) Question facile pourtant assez peu abordée. Nous avons accepté les arguments où les matrices étaient dessinées, en faisant apparaître leurs lignes et colonnes.
- (17)(17a) Plutôt bien réussie.
- (17b) Également bien réussie.
- (17c) Le plus rapide était de passer par la norme, ce qui a parfois été vu. On a noté une amélioration des rédactions sur les sommes de carrés nulles. Toutefois, une partie des copies perdaient un certain nombre de coefficients dans leur calcul tout en arrivant à la bonne conclusion.
- (17d) La majorité des tentatives a éludé le « si et seulement si » de la question et seul le sens facile a été traité. Nous avons apprécié les copies qui mentionnaient explicitement que la réciproque n'était pas automatique.
- (18)(18a) Bien réussie.
- (18b) Bien réussie dans l'ensemble. De nombreuses copies ont supposé que toutes les matrices commutaient. Un point était accordé à la traduction en terme de produit matriciel de la question.
- (19)(19a) Là encore l'équivalence n'est traitée correctement que dans une moitié des copies.
- (19b) Bien réussi. Beaucoup de personnes ont traité cette question de manière isolée.
- (19c) La difficulté de cette question provient de l'utilisation de plusieurs arguments et hypothèse. On attendait la justification  $x_3 \neq 0$  pour montrer que l'image est de dimension au moins deux, puis une utilisation convenable du théorème du rang. Nous avons vu quelques tentatives de calcul direct du noyau, incorrectes dans leur immense majorité.
- (19d) Question difficile peu abordée et réussie extrêmement rarement.

(20)(20a) Question simple qui a été perçue comme telle par les candidates et candidats.

(20b) Plusieurs arguments étaient attendus dans cette question. L'orthogonalité a souvent été invoquée pour justifier que la famille est libre, mais l'argument  $z \neq 0$  a souvent été omis.

(21)(21a) Beaucoup de réponses fantaisistes dans cette question plutôt facile de fin de sujet.

(21b) Question très peu traitée.

(22) Question de synthèse difficile et extrêmement peu traitée.