

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2023

Nina Aguillon, Sébastien Martineau

Durée de l'épreuve. 90 min de préparation et 30 min de passage (dont au plus 15 min de présentation sans intervention du jury).

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer.

calculatrice interdite

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 61 personnes ont passé l'épreuve orale de mathématiques. La moyenne des notes s'élève à 13.25, avec un écart-type de 4.29 et une médiane de 14. La distribution est la suivante.

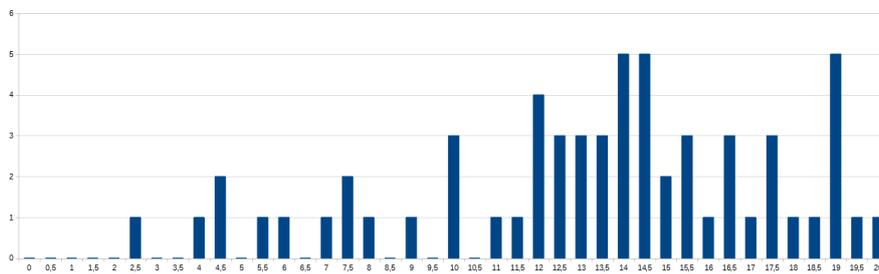


FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

Les deux évolutions notées cette année est la quasi disparition de candidat ou de candidate se retrouvant démunis pendant leur oral, et l'augmentation significative de la part des admissibles qui dépassent le temps maximal alloué à la restitution de leur résultat.

Déroulement de l'épreuve. Les candidates et candidats disposent tout d'abord de 90 min pour préparer leur passage à l'oral. Chaque planche est constituée de deux exercices indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court couplé avec un plus difficile ou long) et originalité. Comme les années précédentes, nous avons prêté une attention toute particulière à la progressivité des planches, qui contenaient toutes des questions faciles pour mettre en confiance les candidats et candidates, mais également des questions plus difficiles permettant de briller.

Le passage à l'oral, qui dure 30 min, se compose des deux phases suivantes.

- La *présentation* (15 min maximum) : le candidat ou la candidate présente à sa guise et sans intervention du jury les éléments résolus lors de sa préparation.

- La *reprise* (reste du temps) : le jury mène la discussion. Il revient d'abord sur ce qui a été écrit et dit lors de la présentation afin de rectifier certaines erreurs ou corriger des maladroites. Ensuite, afin de tester les réactions et le recul, les examinateurs abordent les questions qui n'ont pas été réussies en donnant des indications. Dans le cas de très bons oraux, le jury n'hésite pas à poser des questions supplémentaires d'ouverture ne figurant pas dans la planche.

Nous insistons sur le fait que la prestation orale est notée sur sa totalité. Ainsi, une présentation courte n'est pas pénalisée en soi, et elle laisse simplement plus de temps au candidat ou à la candidate pour améliorer sa note lors de la reprise. Celle-ci est très importante pour la détermination de la note : une personne ayant bloqué sur des questions pourra obtenir une très bonne note s'il ou elle réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maîtrise des notions essentielles du programme.

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral est très satisfaisant et permet au jury de bien évaluer les candidates et les candidats.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise.

Public. Les oraux se sont bien déroulés. Le public respecte un silence total et ne manifeste aucune réaction jusqu'à la sortie de la candidate ou du candidat. La personne interrogée est la première à sortir et à rentrer, sans interaction avec le public.

2 Conseils

Dans leur immense majorité, les personnes interrogées sont bien préparées et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactives et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour annoncer, au bout de 14 min, qu'il reste une minute, pour mettre un terme à la présentation lorsque les 15 min imparties sont écoulées, ou en cas de force majeure (par exemple si les feutres fonctionnent mal). La gestion du tableau est laissée libre, cela fait partie de la présentation de leurs résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points. Il n'est pas utile de demander l'accord du jury pour effacer une partie du tableau pendant cette phase, ce dernier répondra systématiquement qu'il laisse la personne examinée gérer seule.

Nous rappelons que, pendant la présentation, il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus

nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau.

Pistes infructueuses. Nous encourageons les candidates et les candidats à mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d'exposer un raisonnement incomplet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quelles sont les limites du raisonnement. Ce point a été bien pris en compte par la plupart des admissibles.

Gestion du temps. Nous rappelons que, depuis 2021, la présentation dure 15 min maximum. Il ne faut pas chercher à utiliser absolument ces 15 min maximales allouées à la présentation : il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 min et 13 min** pour cette phase. Rappelons que le dépassement des 15 minutes est pénalisé et que le jury se réserve le droit d'y réagir encore plus sévèrement à l'avenir. Les personnes interrogées ayant excédé le temps imparti n'avait pour la plupart pas fait l'exercice de synthèse et de hiérarchisation des résultats attendu dans cette partie. Nous conseillons de prendre un moment en préparation pour réfléchir à la gestion du temps.

Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. À l'inverse il convient d'éviter de parler trop vite ou de ne quasiment rien écrire au tableau. Cette année encore, cet écueil n'a concerné qu'une poignée d'oraux.

Lorsque le jury indique qu'il ne reste qu'une minute, la bonne conduite à adopter n'est pas d'augmenter le débit de parole ou de paniquer. Si ce qu'il vous reste à dire tient en une minute, c'est parfait. Dans le cas contraire, sélectionnez, parmi ce que vous n'avez pas eu le temps d'aborder, les points clés principaux : les expliquez brièvement, surtout à l'oral et en n'écrivant que ce qui vous paraît vraiment essentiel, et négligez le reste.

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons à écrire au tableau, à la fois les indications du jury et les pistes de réflexion. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation. Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est **fortement valorisée**. À cette étape, il est important d'obtenir l'accord du jury avant d'effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons de laisser les notes de côté et de ne s'y référer que ponctuellement pour se rappeler d'un résultat non présenté. Nous encourageons plutôt à se concentrer sur l'échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement les candidates et candidats et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsqu'une personne

est laissé sans indication en silence, c'est que le jury estime que vous avez des chances de débloquent la situation par vous-même.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidates et candidats à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury. Cela est valable tout au long de la prestation : il s'agit de ne jamais se décourager et de faire de son mieux pendant toute la durée de l'oral. La présence de deux exercices et le découpage de l'oral en deux parties permet une évaluation large ; une difficulté passagère n'équivaut pas à une mauvaise note. Chaque année, quelques personnes connaissent un début difficile mais tirent remarquablement profit de la reprise.

Attitude des candidates et candidats. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut être destabilisant. Nous invitons les personnes interrogées à traiter le jury avec respect et à tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a mal été traité. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidats et les candidates à réagir. Se tromper est normal et le processus de correction fait partie des qualités évaluées.

Nous avons malheureusement, cette année encore, vu certaines personnes s'enfermer dans leurs erreurs sans tenir compte des multiples indications du jury visant à les remettre dans le droit chemin. Nous déconseillons les comportements suivants, particulièrement les deux premiers.

- Excès de confiance en soi. Ici, les candidates ou candidats agissent comme si elles ou ils ne comprenaient pas les questions. Ces personnes répètent mot pour mot leurs arguments même quand le jury y revient avec insistance. Cette absence de remise en question, en plus de faire perdre beaucoup de temps, est pénalisée.
- Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le candidat ou la candidate passe outre et continue sur sa propre piste. Bien que cette dernière puisse aboutir dans certains cas (exceptionnels) et malgré la frustration que cela peut occasionner, nous invitons plutôt à suivre la piste proposée par le jury et à réfléchir ultérieurement à sa propre piste.
- Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de personnes ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue ; cela fait partie des compétences évaluées.
- Utilisation de notions hors programme. Rappelons que les « demi-souvenirs » peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices sont conçus pour être traités dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons fortement l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. L'utilisation de techniques hors programme n'est jamais valorisée par le jury. Nous observons de plus que les candidates et les candidats maîtrisent généralement mal ce type d'arguments. Nous proposons systématiquement d'autres pistes, plus simples et au programme, pour résoudre la question. C'est l'occasion de tester la réactivité de la personne interrogée.

3 Commentaires mathématiques

Il importe que la logique des raisonnements menés soit maîtrisée. Cette maîtrise se manifeste dans l'expression orale et écrite par des qualités de clarté et de précision. Certaines notions fondamentales, comme les familles libres, l'indépendance ou la continuité, ont posé problème à de multiples reprises. Voici, planche par planche, le détail de nos commentaires concernant les oraux de 2023.

Planche n° 1 du 14 juin. Le premier exercice portait sur la détermination des paramètres d'une loi de probabilité simple à partir de la connaissance de son espérance et de sa variance. Cela amenait à résoudre un système linéaire 3×3 . Toutes les personnes interrogées ont bien saisi l'exercice et abordé l'extension à un quatrième paramètre proposée en reprise.

Le second exercice commençait par des manipulations relativement simples de dérivées de fonctions trigonométriques, qui ont été bien réussies. La recherche des solutions de l'équation $\tan(x) = \frac{\varepsilon^2}{x}$ fut plus confuse, souvent basée sur les graphes ou sur une utilisation hâtive du théorème de la bijection. La question 5 a été discriminante, et la 6 à peine abordée.

Planche n° 2 du 14 juin. Le premier exercice portait sur les propriétés d'un rectangle obtenu aléatoirement à partir de deux variables aléatoires géométriques indépendantes. Les candidates et candidats ont pour la plupart su mobiliser leurs connaissances sur les variables aléatoires géométriques.

L'exercice 2 portait sur les propriétés qualitatives d'une suite de fonctions croissante. La question 4 a déstabilisé plusieurs personnes qui se sont lancées dans des études de fonctions, qui étaient en fait dispensables. Si la question 3 a posé peu de problèmes, son réemploi dans la question 5 n'était pas toujours clair. La 6 n'a jamais été abordée.

Planche n° 1 du 15 juin. Dans le premier exercice, c'est la dernière question qui a été source de difficultés. Si l'intégration par parties a souvent été envisagée, l'idée d'obtenir une équation par une seconde intégration par parties était souvent confuse ou absente, ou encore implémentée avec des fautes de calcul. Il importait alors d'effectuer la bonne seconde intégration par parties, afin de ne pas simplement défaire la première.

En ce qui concerne le second exercice, la première question était basique et la 4b était la plus ardue. Dans la question 3b, le cas particulier se divisait en réalité en deux cas particuliers : on pouvait avoir $(a_1, b_1) = (1, 0)$ mais aussi $n = 1$ et $(a_1, b_1) = (0, 1)$.

Planche n° 2 du 15 juin. L'exercice 1 utilisait des probabilités puis de l'algèbre linéaire, pour conclure avec une pointe d'analyse. Le jury a apprécié lorsque le rôle joué par l'indépendance était bien compris en question 1. En question 2, on a souvent vu $A^n v_1$ en lieu et place de $A^{n-1} v_1$. À la question 3, il convenait de ne pas se tromper entre PDP^{-1} et $P^{-1}DP$. Il se trouve que si on prenait $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cette erreur ne portait pas à conséquence : pourquoi ?

Quant à l'exercice 2, il exigeait d'être à l'aise avec les nombres complexes, ce qui n'était pas toujours le cas. À la question 3, pour calculer le module de $\frac{a+ib}{c+id}$, plutôt que de chercher à identifier les parties réelles et imaginaires $\frac{a+ib}{c+id}$, il était commode d'écrire $\left| \frac{a+ib}{c+id} \right| = \frac{|a+ib|}{|c+id|}$.

Planche unique du 16 juin. Le premier exercice étudiait deux variables aléatoires différentes. La comparaison de leurs espérances était intuitivement claire et se prouvait de façon rigoureuse à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Seule la meilleure candidate de cette session a mené le raisonnement à son terme, en reprise.

Le second exercice visait à minimiser la surface des parois d'une boîte sans couvercle de volume 1. Il donnait l'occasion d'étudier une fonction à deux variables. La question 2 a été comprise mais difficilement formalisée au delà de « la limite quand $x, y \rightarrow +\infty$ ». Les techniques de recherche d'extremum locaux sont connues mais ont donné lieu à des erreurs de calcul. On a seulement vu une piste partielle dans la dernière question.

Planche n° 1 du 17 juin. Le premier exercice portait sur de l'algèbre linéaire. On y démontrait que \mathbf{R}^n admettait trois endomorphismes tels que « l'image de l'un soit le noyau du suivant » si et seulement si n était pair. La question difficile de cet exercice était la dernière.

Dans le second exercice, on étudiait certaines propriétés concernant une variable aléatoire binomiale de paramètres n quelconque et $p = 1/2$. Les questions sources de difficulté étaient les questions 1b et 2b. Nous avons vu des réponses convaincantes à toutes les questions de cette planche.

Planche n° 2 du 17 juin. L'exercice 1 mettait en lien l'indépendance de deux événements et l'orthogonalité en algèbre linéaire. Présenté sous forme concrète avec un dé à 4 faces, il rend compte en réalité de l'interaction entre deux événements absolument quelconques, puisque connaître l'occurrence ou la non-occurrence pour deux événements revient à $2 \times 2 = 4$ possibilités. Cet exercice a été traité de façon assez inégale. Notamment, il y avait une grande variabilité sur le degré de maîtrise de la notion de projection orthogonale. Plusieurs personnes ont traité cet exercice de façon complète.

Dans le second exercice, la question 1 était assez basique tandis que la question 2 était plus ardue. Les manipulations de valeurs absolues en 2b ou le dessin du graphe de f_n ont souvent été assez laborieux. Seul un excellent candidat a terminé cet exercice sans aide.

Planche n° 1 du 19 juin. Le premier exercice était l'occasion d'utiliser les outils de bases d'algèbre linéaire sur une modélisation probabiliste simple. Seul le mélange des thèmes a causé quelques soucis, dont la difficulté à formaliser la première question au delà de la répétition de l'énoncé ou l'utilisation des contraintes sur les p_i . On a systématiquement demandé en reprise quel était l'ensemble des solutions possibles pour les questions 2 et 4.

Le second exercice commençait par des questions autour de deux lois usuelles, l'une discrète et l'autre continue. C'était l'occasion de vérifier où intervenait l'hypothèse d'indépendance. Les deux dernières questions nécessitaient initiative et aisance dans les calculs, avec des résultats fort variables d'une personne examinée à l'autre.

Planche n° 2 du 19 juin. Le premier exercice portait sur des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^{n+1} de dimension 1 ou 2. À travers une interprétation géométrique, on retrouvait les formules de régression linéaire via une autre approche. La première question a mis en lumière quelques difficultés de vocabulaire. Paradoxalement, la deuxième a

souvent été moins bien réussie que la troisième. Seule la meilleure candidate a réussi à traiter les deux dernières questions en tirant profit du fait que les solutions n'étaient pas demandées.

Le deuxième exercice portait d'abord sur la loi de Poisson avec une utilisation du théorème de transfert qui s'est avéré inégalement maîtrisé. L'exercice se tournait ensuite sans le dire vers la construction d'un intervalle de confiance qui a été globalement bien réussie.

Planche n° 1 du 20 juin. Le premier exercice portait sur une étude de fonction. En question 1, il convenait d'être au clair sur les domaines permettant de garantir respectivement la croissance de x^2 et la décroissance de $1/x$. En question 3, il s'agissait de justifier que la fonction f était C^1 sur son domaine de définition, pas d'étudier l'éventuelle prolongeabilité en une fonction C^1 définie sur \mathbf{R} . Lorsqu'on utilisait le théorème de la bijection en question 4, il fallait être capable de l'énoncer proprement.

L'exercice 2 était un problème d'algèbre linéaire se concluant par des probabilités puis de l'analyse de suite. En question 2, passer de l'écriture $(0, \dots, 0, a_i, 0, \dots)$ vers $a_i e_i$ ne se faisait pas spontanément. La question 3 a posé des difficultés. Néanmoins, le rôle joué par le fait que a_i soit nul ou non a généralement été repéré. Ne pas inventer de théorème : notamment, pour une matrice triangulaire, les valeurs propres se lisent en effet toujours sur la diagonale mais pas leur multiplicité. La question 5 n'a pas été abordée de façon satisfaisante : le cœur de la question était le cas $\alpha = 1$.

Planche n° 2 du 20 juin. L'exercice 1 portait sur l'étude de symétries. Il était approprié d'être capable, à notre demande, de ré-expliquer pourquoi $E = \text{Ker}(N - I)$ et $F = \text{Ker}(N + I)$. Lorsqu'on demandait de tracer deux droites D_1 et D_2 dans le plan (distinctes, non-orthogonales, passant par l'origine) et de tracer le symétrique d'un point par rapport à D_1 le long de D_2 , nous avons trop souvent vu le dessin du symétrique par rapport à D_1 le long de son orthogonal. La question 2 a été systématiquement bien traitée tandis que la question 3b n'a pas été plus qu'effleurée.

L'exercice 2 proposait une introduction au critère de condensation de Cauchy. La question 1 a été bien traitée. Les questions 2 et 3 ont été abordées, pas toujours avec clarté. L'objet de la question 4 était d'appliquer les questions précédentes et d'utiliser directement l'encadrement pour conclure à la convergence. Plusieurs personnes ont plutôt tenté des comparaisons avec des séries de Riemann, le plus souvent bancales et sans succès. Leurs connaissances hors programme les ont desservis.

Planche n° 1 du 26 juin. Dans le premier exercice, on s'intéressait à l'ensemble des combinaisons linéaires de trois fonctions et à sa stabilité par rapport à la dérivée seconde. C'était l'occasion d'étudier une matrice simple et de mobiliser un peu de trigonométrie. La dernière question n'a été traitée que dans les meilleurs oraux.

Dans le second exercice, on étudiait une fonction polynomiale de degré 3. Les trois premières questions ont été en général bien traitées, quoique la question du positionnement des solutions soit souvent restée peu formalisée. La fin de l'exercice, plus ouverte et nécessitant de l'initiative, a permis de départager les candidates et les candidats. Nous avons systématiquement demandé des éclaircissements sur le passage à la limite dans la dernière question.

Planche n° 2 du 26 juin. Le premier exercice a posé plus de difficultés que le second, notamment à cause de l'usage qu'il requerrait des formules de trigonométrie. Le taux de variation ou développement limité à l'ordre 1 de la question 4 n'a souvent pas été reconnu. En définitive, on démontrait un résultat de Viète selon lequel π vaut $2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \dots$

L'exercice 2, inspiré par la notion d'équilibre de Nash en théorie des jeux, mêlait algèbre linéaire et probabilités discrètes. On appréciait, en question 2, que l'indépendance soit invoquée de façon explicite et spontanée par le candidat ou la candidate.