SESSION 2023

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

On pourra utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

Il est demandé de **soigneusement** *numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, en les* $\boxed{\text{encadrant}}$ *ou en les* <u>*soulignant*</u>*. Il sera fait grand cas de la* **clarté**, *de la* **concision** *et de la* **précision** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.*

EXERCICES.

I. Soient α et β deux réels. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par les premiers termes $x_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 \in \mathbf{R}$, et par les relations $x_{n+1} = \dfrac{y_n + \alpha}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + \beta}{2}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On définit ensuite pour tout entier n, $v_n = x_n - \dfrac{2\alpha + \beta}{3}$ et $w_n = y_n - \dfrac{\alpha + 2\beta}{3}$.

(1) *(1a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} w_n$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$.

(1b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_n^2 + w_n^2 = \dfrac{v_0^2 + w_0^2}{4^n}$.

(1c) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

(1d) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

II. On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(2) *(2a)* Quel est le domaine de définition de f ?

(2b) Que donne l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée aux vecteurs (x, y) et $(1, 1)$ de $\mathbf{R}^2$?

(2c) Soit $a > 0$. Calculer $f(a, a)$ et justifier sans calcul supplémentaire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, a) = 0$.

(3) On suppose que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, où $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

(3a) Exprimer $f(x, y)$ en fonction de r et θ.

(3b) Que remarque-t-on ? Interpréter.

PROBLÈME A.

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, « être malade » ou « être donneur compatible »). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de $\boxed{\textbf{ne pas}}$ posséder la propriété recherchée. Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

A.1. Recherche de <u>toutes</u> les personnes possédant la propriété.

On veut trouver **toutes** les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

Protocole $\boxed{\text{A}}$

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole $\boxed{\text{A}}$ pour n personnes.

(4) *(4a)* Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif ?

(4b) Quelles valeurs peut prendre A_n ?

(4c) Déterminer la loi de A_n.

(4d) Montrer que l'espérance de A_n est $E[A_n] = n + 1 - n\,q^n$.

(5) On considère un entier k tel que $1 \leq k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Protocole $\boxed{\text{B}}$

On fait un test pour chacune des n personnes.

(6) *(6a)* À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole $\boxed{\text{A}}$ qu'avec le protocole $\boxed{\text{B}}$? *On exprimera le résultat en fonction de n.*

(6b) Calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.

(6c) Justifier que, pour n assez grand, le protocole $\boxed{\text{B}}$ est préférable au protocole $\boxed{\text{A}}$.

A.2. Recherche d'<u>une</u> personne possédant la propriété.

On veut dorénavant trouver **une** personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole $\boxed{\text{C}}$

On teste les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est-à-dire que $C = j$ si la j-ème personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole $\boxed{\text{C}}$. On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

(7) *(7a)* Donner la loi de C.

(7b) Donner, sans justification, l'espérance de C.

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geq 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Tournez la page S.V.P.

Protocole $\boxed{\text{D}}$

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

(8) Soit k un entier strictement positif.

(8a) Exprimer l'évènement $\{G > k\}$ en fonction de la variable aléatoire C, introduite en préambule de la question *(7)*.

(8b) Calculer la probabilité $P(G > k)$.

(8c) Reconnaitre la loi de G.

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

(9) *(9a)* Quelles valeurs peut prendre X ?

(9b) Pour $k \geq 1$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X = i \mid G = k)$.

(9c) Calculer la limite de cette quantité lorsque $q \to 1$.

(9d) Montrer que X est indépendante de G.

(9e) Montrer que $E[X] = \dfrac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.

(10) On note D le nombre de tests effectués avec le protocole $\boxed{\text{D}}$.

(10a) Exprimer, en fonction des valeurs prises par G et par X, l'évènement $\{D = 3\}$.

(10b) Trouver une relation entre D, G et X.

(10c) Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que $P(D = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} P\big(C = (k-1)n + j - k\big)$.

(11)(11a) Calculer $E[D]$.

(11b) À n fixé, calculer la limite du quotient $\dfrac{E[D]}{E[C]}$ lorsque $q \to 1$. Interpréter ce résultat.

Problème B.

On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

(12)(12a) Justifier que la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(12b) Montrer que f est paire.

(12c) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f'.

(12d) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

(12e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(13)(13a) Soit un réel $M > 0$. En effectuant le changement de variable $u = e^x$, montrer que

$$\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{e^M} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

(13b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

(13c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leq f'(x) \leq 1$.

(13d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\,.$$

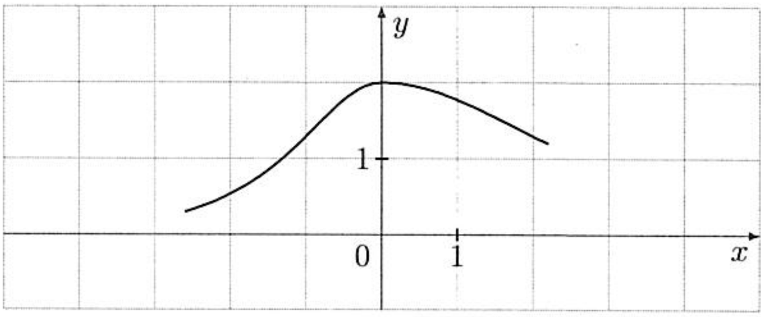
Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive, strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ converge.

(14)(14a) Justifier que g admet une limite en $-\infty$ et une limite en $+\infty$.

(14b) Montrer que ces limites sont toutes les deux nulles.

(14c) Montrer qu'il existe <u>exactement</u> deux réels x_- et x_+ tels que $g(x_-) = g(x_+) = \dfrac{g(0)}{2}$.

(14d) On a tracé ci-dessous, en repère orthonormé, une partie du graphe d'une fonction g qui vérifie les hypothèses. Recopier ce graphe et le compléter en faisant apparaitre toutes les informations obtenues en question *(14)*. On placera en particulier x_- et x_+.



Dans la suite de l'énoncé, on suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad |g(x) - g(y)| \leq |x - y|\,.$$

Pour $A > 0$ et $L > 0$, on définit les fonctions $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$h(t) = g(t) + \sin(At) \qquad \text{et} \qquad F(t) = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} h(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

(15)(15a) Montrer que $F(t) - g(t) = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} (g(s) - g(t))\mathrm{d}s + \dfrac{\cos(A(t-L)) - \cos(A(t+L))}{2LA}$.

(15b) Montrer que $\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} |s - t|\,\mathrm{d}s = L^2$.

(15c) En déduire que $|F(t) - g(t)| \leq \dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{LA}$.

(15d) Comment choisir $L > 0$ pour que $\dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{LA}$ soit le plus petit possible, A étant fixé ?

Tournez la page S.V.P.

(16) On suppose dans cette question que $A = 2\pi$ et $L = 1$.

(16a) Exprimer F en fonction de g.

(16b) Recopier le tracé complet de la fonction g fait en *(14d)* et dessiner également le graphe de la fonction h.

Problème C.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(17)(17a) Déterminer le noyau de l'application linéaire représentée par A.

(17b) Déterminer les valeurs propres de A.

(17c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

On considère un entier $n \geq 1$ et l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{2n+1}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \ldots, x_{2n-1} + x_{2n+1}, x_{2n}).$$

(18)(18a) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ?

(18b) Déterminer une base du noyau de φ.

(18c) Déterminer le rang de φ.

(18d) A-t-on $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}^{2n+1}$?

(19) Soient a et b deux réels. En étudiant la partie imaginaire de $e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})$, montrer que

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\cos(b)\sin(a).$$

(20) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ et $\theta = \dfrac{k\pi}{2n+2}$. On considère le vecteur

$$v_\theta = \big(\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \ldots, \sin((2n+1)\theta)\big).$$

(20a) Pour $j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, montrer que la j-ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta).$$

(20b) Montrer que v_θ est un vecteur propre de φ, associé à la valeur propre $2\cos(\theta)$.

(21)(21a) La matrice de φ est-elle diagonalisable ?

(21b) Donner un équivalent de la plus petite valeur propre de φ en valeur absolue, lorsque n tend vers l'infini.