

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2024

Anna Ben-Hamou, Sébastien Martineau

Durée de l'épreuve. 90 minutes de préparation puis 30 minutes de passage, dont au plus 15 minutes de présentation sans intervention du jury.

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer.

Calculatrice interdite

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 65 personnes ont passé l'épreuve orale de mathématiques. La moyenne des notes s'élève à 13.12, avec un écart-type de 4.14 et une médiane de 13.5. Les notes sont distribuées comme suit.

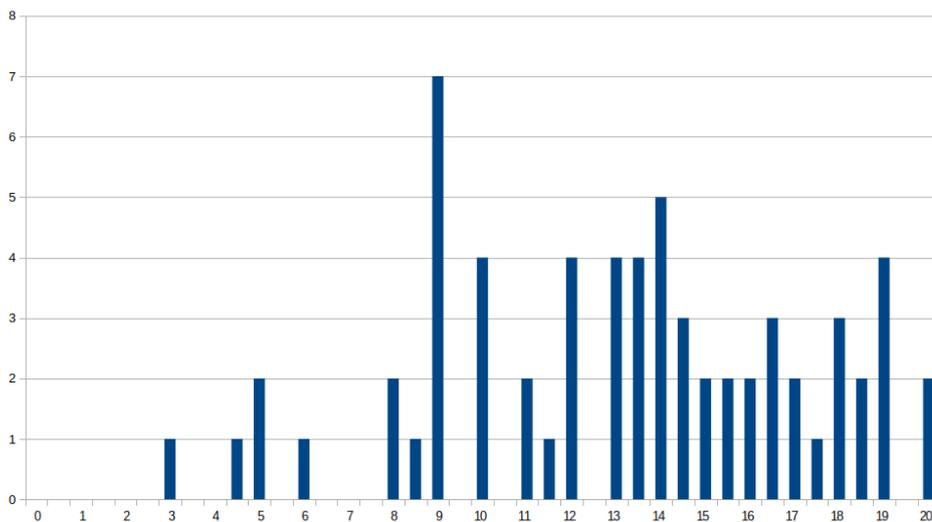


FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

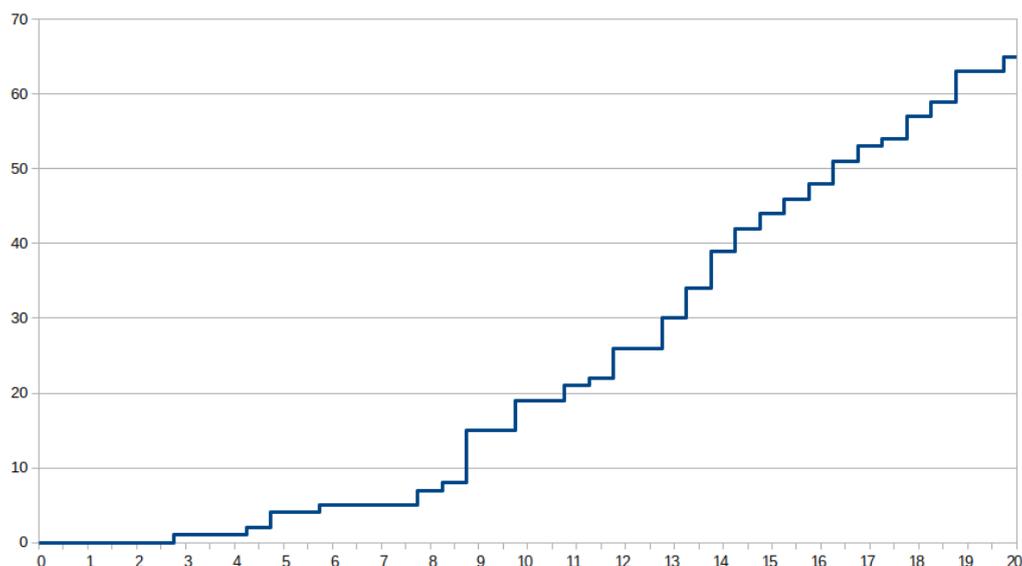


FIGURE 2 – Effectifs croissants cumulés des notes d'oral.

Déroulement général de l'épreuve. Les candidats se voient remettre une planche comportant deux exercices. Ils disposent de 90 minutes pour préparer ces deux exercices. S'ensuit un oral de 30 minutes divisé en deux phases — la présentation, puis la reprise.

La phase de présentation dure jusqu'à 15 minutes maximum, au gré du candidat. Sans interruption de la part du jury, le candidat présente alors ses réponses ou pistes éventuelles concernant les questions abordées. Si cette phase atteint la quatorzième minute, un membre du jury signale alors qu'il ne reste plus qu'une minute : dans cette configuration, il s'agit non plus de viser le détail ou l'exhaustivité mais de choisir un ou deux derniers points plus importants que les autres et les évoquer sommairement. Si la présentation atteint les 15 minutes, le jury met un terme à la présentation.

La reprise, qui fait emploi de tout le temps restant de l'oral, consiste en un échange avec les examinateurs. Dans un esprit bienveillant, le jury pose des questions afin de clarifier certains arguments exposés en présentation et voir si, en étant accompagné, le candidat peut traiter certaines des questions laissées en suspens. Au fil de l'échange, il peut arriver qu'on s'éloigne un peu du sujet strictement abordé dans la planche : typiquement, s'il semble que le candidat a commis une certaine erreur concernant les projections orthogonales, on pourra lui demander des définitions ou résultats de cours relatifs aux projections orthogonales ; on pourra aussi poser une question qui n'est pas directement liée à l'exercice mais permet de tester spécifiquement l'erreur repérée. Dans les rares cas où une planche est terminée en présentation ou en reprise, le temps restant de la reprise est dédié à des questions supplémentaires, généralement ardues, qui prolongent la réflexion amorcée par les exercices de la planche.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise.

Conception des planches. Chaque planche est conçue pour offrir une couverture thématique large (au moins 2 des 3 grands thèmes : algèbre, analyse, probabilités) et des questions de difficultés étalées et calibrées. On essaie également, autant que possible, de panacher questions standards et questions originales. Il est toutefois délicat de produire des planches tout à fait équivalentes : les écarts éventuels entre planches sont compensés par une notation prenant en compte ces écarts.

Présence du public. Les oraux se sont globalement bien déroulés. Nous étions en mesure d'accueillir jusqu'à douze personnes par oral. Le public respecte un silence total et ne manifeste aucune réaction jusqu'à la sortie du candidat. Il n'est pas bienvenu de se retourner avec insistance vers le jury, moins encore si c'est pour chercher à voir ce qu'il écrit.

2 Conseils

Dans leur immense majorité, les personnes interrogées sont bien préparées et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactives et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour annoncer, au bout de 14 minutes, qu'il reste une minute, pour mettre un terme à la présentation lorsque les 15 minutes imparties sont écoulées, ou en cas de force majeure (par exemple si les feutres fonctionnent mal). La gestion du tableau est laissée libre, cela fait partie de la présentation de leurs résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points.

Nous rappelons que, pendant la présentation, il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau. Naturellement, les candidats peuvent utiliser à leur gré les notes prises durant la phase de préparation.

Pistes infructueuses. Il est bienvenu de mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu'une question n'a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d'exposer un raisonnement incomplet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quelles sont les limites du raisonnement. Ce point a été bien pris en compte par la plupart des admissibles.

Gestion du temps. Nous rappelons que, depuis 2021, la présentation dure 15 minutes maximum. Il ne faut pas chercher à utiliser absolument ces 15 minutes maximales allouées à la présentation : il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 et 13 minutes** pour cette phase. Rappelons que le dépassement des 15 minutes est pénalisé. Les personnes interrogées

ayant excédé le temps imparti n'avait pour la plupart pas fait l'exercice de synthèse et de hiérarchisation des résultats attendu dans cette partie. Nous conseillons de prendre un moment en préparation pour réfléchir à la gestion du temps.

Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. À l'inverse il convient d'éviter de parler trop vite ou de ne quasiment rien écrire au tableau.

Lorsque le jury indique qu'il ne reste plus qu'une minute, la bonne conduite à adopter n'est pas d'augmenter le débit de parole ou de paniquer. Si ce qu'il vous reste à dire tient en une minute, c'est parfait. Dans le cas contraire, sélectionnez, parmi ce que vous n'avez pas eu le temps d'aborder, les points clés principaux : expliquez-les brièvement, surtout à l'oral et en n'écrivant que ce qui vous paraît vraiment essentiel, et négligez le reste.

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons à écrire au tableau, à la fois les indications du jury et les pistes de réflexion. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation. Toute prise d'initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est fortement valorisée. À cette étape, il est important d'obtenir l'accord du jury avant d'effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons de laisser les notes de côté et de ne s'y référer que ponctuellement pour se remettre en mémoire un résultat non présenté. Nous encourageons plutôt à se concentrer sur l'échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement possible les candidats et n'essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsqu'une personne est laissée sans indication en silence, c'est que le jury estime qu'elle a des chances de débloquer la situation par elle-même.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidats à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury. Cela est valable tout au long de l'oral : il s'agit de ne jamais se décourager et de faire de son mieux jusqu'à la dernière minute. La présence de deux exercices et le découpage de l'oral en deux parties permet une évaluation large ; une difficulté passagère n'équivaut pas à une mauvaise note. Chaque année, quelques personnes connaissent un début difficile mais tirent remarquablement profit de la reprise.

Attitude des candidats. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut être déstabilisant. Nous invitons les personnes interrogées à traiter le jury avec respect et à tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a été mal traité. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète

ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidats à réagir. Se tromper est normal et le processus de correction fait partie des qualités évaluées.

Nous déconseillons les comportements suivants.

- Excès de confiance en soi. Ici, les candidats agissent comme s'ils ne comprenaient pas les questions qu'on pose, considérant les avoir déjà traitées de façon satisfaisante. Ces personnes répètent mot pour mot leurs arguments même quand le jury y revient avec insistance. Cette absence de remise en question, en plus de faire perdre beaucoup de temps, est pénalisée.
- Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le candidat passe outre et continue sur sa propre piste. Bien que cette dernière puisse aboutir dans certains cas (exceptionnels) et malgré la frustration que cela peut occasionner, nous invitons plutôt à suivre la piste proposée par le jury et à réfléchir ultérieurement à sa propre piste.
- Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de personnes ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue ; cela fait partie des compétences évaluées.
- Utilisation de notions hors programme. Rappelons que les « demi-souvenirs » peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices sont conçus pour être traités dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons fortement l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. L'utilisation de techniques hors programme n'est jamais valorisée par le jury. Nous observons de plus que ce type d'arguments est généralement mal maîtrisé. Nous proposons systématiquement d'autres pistes, plus simples et au programme, pour résoudre la question. C'est l'occasion de tester la réactivité de la personne interrogée.

3 Commentaires mathématiques

Dans cette section, on commence par un bilan de quelques écueils fréquents avant de passer à une analyse détaillée planche par planche.

Commentaires généraux.

- L'usage des valeurs absolues est souvent assez mal maîtrisé.
- On rappelle que la notion d'équivalent pour les suites numériques n'est pas au programme. Lorsqu'un candidat proposait une démonstration faisant intervenir cette notion, on demandait en reprise une démonstration sans équivalent. En outre, faire usage de cette notion dans un exercice conçu pour être résolu sans elle introduit de nouvelles subtilités, donc de nouvelles occasions de commettre des erreurs — de fait, cela a été observé.
- Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors (u_n/n) tend vers 0. Ce fait est généralement acquis mais dès qu'il s'agit de l'utiliser lors un passage à la limite dans une relation

de récurrence $u_{n+1} = f(u_n, n)$, les candidats semblent réticents et préfèrent garder le n dans la limite pour écrire ℓ/n . Voir la seconde planche du 18 juin et la première du 21 juin.

- Concernant les fonctions de deux variables, nos questions et reprises étaient conçues pour être conformes à ce qui figure au programme officiel, à savoir condition nécessaire et suffisante d'extremum pour les formes quadratiques, condition suffisante d'extremum local pour les fonctions régulières.
- Petit point de lexique, dont nous n'avons aucunement tenu rigueur : ne pas employer « identiques » comme synonyme de « identiquement distribuées » ; ce sont les lois qui sont égales, aucunement les variables aléatoires. Au-delà de la forme, on a (rarement) rencontré des candidats pour qui les locutions « les X_i ont même loi » et « $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ » étaient synonymes.
- Les candidats ne pensent pas assez souvent à exploiter la linéarité de l'espérance. C'est une propriété puissante, qui permet de mener certains calculs même sans connaître la loi précise suivie par notre variable aléatoire.
- Quand interviennent des probabilités conditionnelles, il ne s'agit pas de se ruer automatiquement sur la formule de Bayes : revenir à la définition de « probabilité conditionnelle » est parfois préférable. De façon générale, il est sain de tenter les pistes simples avant d'envisager les pistes compliquées, et la définition de probabilité conditionnelle est plus simple que la formule de Bayes.

Planche du 12 juin. L'exercice 1 étudiait une fonction définie par le biais de la théorie des probabilités. La question (3) de cet exercice n'a été traitée que par les très bons candidats. Un excellent candidat qui avait terminé la planche a pu, en reprise, calculer $f_n(p) + f_n(1-p)$. Pour le contexte, mentionnons le fait suivant, qui n'a bien sûr fait l'objet d'aucune allusion durant les oraux : les f_n fournissent un exemple naturel de suite de fonctions polynomiales convergeant simplement vers une fonction discontinue.

Le second exercice employait un modèle simpliste de dynamique des populations comme prétexte pour faire de l'algèbre linéaire. Dans la première question, la partie portant sur la liberté a donné lieu à un panel de réactions assez étendu, allant de l'absence de réponse à la réponse concise en passant par des réponses fausses, longues ou détournées. La question (3) est celle ayant posé le plus de difficultés. La question (4b) a elle aussi posé problème.

Planche 1 du 13 juin. L'exercice 1 visait à établir une version unilatérale de l'inégalité de Bienaymé–Tchebycheff, avec, en question (4), une application à l'écart entre l'espérance et la médiane d'une variable aléatoire réelle. Cette dernière question n'a été traitée par aucun candidat. La question (1) a été, au moins partiellement, traitée par plusieurs candidats, mais personne n'a vu comment passer du résultat de la question (1) à celui de la question (2). L'idée de chercher « le meilleur a possible » a néanmoins pu être obtenue lors de la reprise. Si l'expression de la variance comme $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ est généralement connue, il ne faut pas oublier sa définition comme $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Dans le second exercice, on considérait une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , non constante, et telle que l'image d'un produit est égale au produit des images. Le but de l'exercice était de montrer que l'image d'une matrice est non nulle si et seulement si cette matrice est inversible, mais personne n'a réussi à traiter la dernière question (qui était effectivement très difficile).

La plupart des candidats ont néanmoins réussi à établir de façon claire et rigoureuse les résultats des premières questions. Notons que le fait que deux matrices de même rang sont équivalentes ne semble pas toujours acquis.

Planche 2 du 13 juin. Le premier exercice était constitué de quatre questions indépendantes autour de la loi exponentielle (probabilité conditionnelle, quantile, inégalité de Bienaymé–Tchebycheff, et fonction de répartition de $X^2 + X^4$). La première question a été globalement bien réussie. Attention quand même, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une définition, ce n'est pas la formule de Bayes. Pour la question (3), plusieurs candidats ont pensé à utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebycheff pour montrer que $\mathbb{P}(|X - 1| \geq x) \leq x^{-2}$ sans parvenir à en déduire une majoration sur $\mathbb{P}(X - 1 \geq x)$. La difficile question (4) n'a été traitée par personne en phase de présentation. Néanmoins, après une petite indication, une candidate a pu aller jusqu'au bout lors de la reprise.

Le deuxième exercice mélangeait régression linéaire et trigonométrie. Pour la question (1a), plusieurs candidats ont obtenu le résultat dans le cas où les x_k sont soit tous positifs, soit tous négatifs, tout en remarquant que comme la somme est supposée nulle, ce cas ne se produit que si tous les x_k sont nuls. Pour la question (1b), un seul candidat a trouvé un contre-exemple sur deux points. Lors de la reprise, la suggestion de faire un dessin a néanmoins permis à plusieurs candidats de mieux comprendre.

Planche 1 du 15 juin. Le premier exercice mêlait probabilités et analyse. Les arguments de passage à la limite, aussi bien probabilistes qu'analytiques, manquaient souvent de précision. La question (3) a rarement été traitée. Cet exercice démontrait un résultat qui peut être reformulé comme suit. Soient X, X', Y et Y' quatre variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que X' a même loi que X et que Y' a même loi que Y . Alors, on a l'inégalité $\mathbb{P}(X = Y)\mathbb{P}(X' = Y') \leq \mathbb{P}(X = X')\mathbb{P}(Y = Y')$.

Dans la première question de l'exercice 2, il convenait certes de lister les propriétés à vérifier pour attester que E était un sous-espace vectoriel mais cela ne dispense en rien d'expliquer pourquoi ces propriétés sont en effet valides. La surjectivité de la question (2) a mis en difficulté les candidats. La valeur $r = 0$ a souvent été considérée comme jouant un rôle particulier en question (3), alors que tel n'était pas le cas. Seul un candidat a traité la question (5).

Planche 2 du 15 juin. Il s'agissait d'une planche assez difficile. L'exercice 1 a été globalement mal traité. En question (1), là où invoquer le cours suffisait, nous avons vu à plusieurs reprises des démonstrations aboutissant au résultat incorrect $\frac{99^{100-k}}{100^{100}}$. La question (2) a posé bien des difficultés. Quant à la question (3), certains candidats sont passés à côté de la linéarité de l'espérance, ou encore pensaient que celle-ci requerrait l'indépendance des variables aléatoires.

Pour la question (1) du second exercice, lorsque le terme « intervalle fermé » était employé à la place de « intervalle fermé borné » ou « segment », on demandait au candidat de préciser le sens qu'il donnait à ce terme. La question (1b), combinant réindexation d'un produit (pouvant être rédigé formellement ou avec des pointillés) et usage de la valeur absolue, a posé bien des difficultés. Attention, le fait qu'une fonction f vérifie $f(t - 1) > f(t)$ pour tout

t n'implique en rien sa décroissance. En question (1c), le résultat faux $\frac{1}{|t(t-n)|}$ pour $\frac{f(t-1)}{f(t)}$ est apparu à plusieurs reprises.

Planche 1 du 18 juin. Il s'agissait d'une planche difficile. Les questions (2) et (3) demandaient de l'initiative et n'ont été bien traitées en autonomie que par peu de candidats. La question (4a) demandait de savoir comparer l'intégrale avec une somme pour une fonction décroissante et n'a été bien traitée que par un candidat.

L'exercice 2 mélangeait probabilités et algèbre linéaire, le but étant d'étudier le projeté orthogonal d'un vecteur aléatoire sur un sous-espace vectoriel. Il a été entièrement bien traité par un candidat, mais d'autres ne semblaient pas familier avec la notion de projection orthogonale. Les questions (1) et (2) ont cependant été assez bien réussies.

Planche 2 du 18 juin. Il s'agissait d'une planche relativement facile. L'exercice 1, où l'on considérait une suite définie par récurrence, a été globalement bien réussi. Remarque notable : pour la question (2), plusieurs candidats ont pensé à raisonner par l'absurde en supposant que la limite ℓ était finie, mais le passage à la limite dans la relation de récurrence donnait selon eux $\ell = \ell + \frac{n}{\ell}$. On a donné à trois candidats une question supplémentaire.

L'exercice 2 était un exercice d'algèbre linéaire qui a été lui aussi bien réussi. La dernière question nous semblait plutôt difficile mais a été souvent très bien traitée par analyse/synthèse.

Planche 1 du 19 juin. Le calcul de densité à partir de la fonction de répartition, en question (1), a plusieurs fois donné lieu à des fautes de calcul. Seule une excellente candidate a bien traité la question (2) avant reprise. Pour cette question, on pouvait soit observer que, par positivité des X_i , on avait $\max(X_1, \dots, X_n) \leq X_1 + \dots + X_n$, soit employer la majoration $nte^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} \leq nte^{-t}$. Nombre de candidats pensait à majorer mais ne remarquait que la borne $nte^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} \leq nt$, laquelle était trop grossière pour être utile. La question (3) et la subtile question (4) ont souvent posé problème.

L'exercice 2 permettait de mobiliser le programme d'algèbre linéaire dans une situation d'économie rudimentaire. Le plus souvent, la question (3a) n'était pas traitée en première phase d'oral mais l'était en reprise. La question la moins réussie de cet exercice a été la (3b).

Planche 2 du 19 juin. Cette planche a été assez mal réussie. Dans l'exercice 1, les questions les mieux traitées ont été la première et la quatrième. La question (2) a été dévastatrice. Il n'y a pas de théorème sur la variance d'un produit. Il s'agissait ici de calculer le moment d'ordre 2, en suivant une méthode proche de celle employée en question (1). S'il était attendu que la question (5) soit rarement bien traitée, la question (3) a posé de nombreuses difficultés, bien au-delà de nos attentes.

La question (1) du second exercice a fait l'objet de traitements inégaux, là où la question (2) suivait généralement un même scénario, à savoir déterminer correctement le point critique puis calculer un discriminant. Les candidats n'ont jamais remarqué que f était une forme quadratique : ils calculaient les dérivées partielles d'ordre deux puis déclaraient parfois se ramener à l'étude de la forme quadratique $q(x, y) = 2xy$, manquant d'observer que $q = 2f$. En reprise, on cherchait à déterminer si le candidat était en mesure de nous expliquer

la signification de la locution « minimum local », fût-ce avec les mains : les réponses étaient fort décevantes. La question (4) a été rarement abordée et jamais avec succès. Lors d'un oral, il a été envisagé que la fonction h puisse servir en question (4) : il se trouve que non, cette fonction n'intervenait qu'en question (1).

Planche 1 du 21 juin. La première question de l'exercice 1 a été généralement bien traitée. La question (2) a posé plus de problèmes, certains d'ordre calculatoire, d'autres plus sérieux concernant les critères pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ soit convergente. Pour la question (3), certains candidats sont arrivés à la bonne loi, mais la loi géométrique n'a jamais été identifiée.

Dans l'exercice 2, on considérait une suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$. On a vu plusieurs fois le passage à la limite $\ell = \frac{\ell^2}{n+1}$, et à la reprise, il a fallu à chaque fois un peu de temps pour corriger cette erreur, comme si les candidats avaient peur d'écrire $\ell = 0$. La suite de l'exercice demandait notamment de bien savoir manipuler les quantificateurs. Personne n'a traité entièrement la dernière question.

Planche 2 du 21 juin. La question (1) du premier exercice a été bien faite par tous les candidats. Pour la deuxième question, plusieurs candidats ont fait apparaître $\int_0^{+\infty} (1-x)e^{x-x^2/2} dx$ et reconnu la dérivée de f . Le résultat a aussi été obtenu en intégrant par parties. En question (3), l'intégrale de Gauss a souvent été évoquée mais le calcul n'a été mené à bien qu'une seule fois. Enfin, lors de la question (4), qui demandait d'effectuer un développement limité à l'ordre 3, la manipulation des $o(\cdot)$ n'était parfois pas évidente. Certains ont voulu utiliser la formule de Taylor–Young, avec et sans succès.

Le deuxième exercice était un exercice d'algèbre linéaire plutôt classique. Pour la question (1), plusieurs candidats ont tout de suite cherché une famille génératrice de F , plutôt que de montrer directement qu'il s'agissait d'un sous-espace vectoriel. La question (2) a souvent posé problème, mais certains ont réussi à ré-écrire proprement ce que cela signifiait d'être à la fois dans F et dans G . Quant à la question (5a), on a été surpris de voir plusieurs fois un argument de « juxtaposition des bases », alors qu'il semblait beaucoup plus simple de vérifier que le vecteur w ne vérifiait pas l'équation de S .

Planche 1 du 22 juin. Dans le premier exercice, les questions (2) et (4) ont été bien traitées. La question (1), globalement réussie, a parfois donné lieu à des erreurs, et ce lors de bons oraux. La question (3) était calculatoirement plus délicate. En question (3b), le cas du point critique $(0, 1)$ était conçu comme une sous-question ardue, à résoudre en trouvant à la fois des points proches de valeurs plus élevée et d'autres de valeur plus basse.

La question (1) du second exercice a été bien traitée. La question (5a) était discriminante mais tel était également le cas de la question (2). En question (4), il convenait tout d'abord d'avoir à l'esprit qu'un isomorphisme doit bien être une application linéaire : certains n'y ont pas activement pensé ou encore croyaient que la linéarité n'était pas nécessaire. Cette question (4) a parfois donné lieu à des solutions plus calculatoires que nécessaires, introduisant une inconnue par coefficient de M et étudiant un système linéaire à neuf équations. Suite à une erreur d'ajustement des coefficients, les matrices P et Q n'étaient pas inverses l'une de l'autre et la question (5b) n'était pas traitable. Nous avons ajusté la reprise et la notation en conséquence. Ainsi, nous demandions de s'intéresser à PMQ avec P et Q inverses l'un de

l'autre et de mettre en lien les spectres, en démontrant soi-même le lien en question, sans supposer acquise l'invariance du spectre par similitude. Il est arrivé que cette planche soit quasiment terminée après reprise.

Planche 2 du 22 juin. Le plus souvent, les questions (1a) et (1b) du premier exercice étaient traitées par signe de la dérivée et (1c) par composition de fonctions croissantes. Généralement, nous voyions l'inégalité prétendue stricte $5x^4 > 0$ en question (1a). Puis, en (1b), la dérivée était souvent trouvée via le calcul $5 \exp(x) \exp(x)^4$ plutôt que par $5 \exp(5x)$, ce qui n'est pas un problème. La question (2) était difficile et n'a été abordée qu'en reprise, dans certains oraux, sans aller jusqu'au bout.

Dans le second exercice, la question (1a) a toujours été bien traitée. La question (1b) était particulièrement révélatrice. Le fait que les sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^2 sont précisément $\{(0, 0)\}$, les droites passant par l'origine et \mathbf{R}^2 était rarement clair. Les confusions pouvaient provenir de plusieurs directions : toute droite affine est-elle un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^2 ? est-ce que \mathbf{R}^2 est un sous-espace vectoriel de lui-même ? le plan contient-ils plusieurs sous-espaces vectoriels de dimension 2 ? Il semble que les schémas usuels représentant un sous-espace vectoriel en dessinant un angle ou un parallélogramme censé évoquer un plan dans l'espace sont parfois mal compris : il arrive qu'un parallélogramme dans le plan soit pensé comme un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^2 , ce qui témoigne d'une incompréhension du sujet. Concernant les probabilités, les calculs ont souvent été menés avec beaucoup plus de lourdeur que nécessaire. En (2b), le réflexe a plusieurs fois été de chercher à déterminer la loi de S . Il était préférable ici d'écrire $S = UX + VY$ et d'utiliser les propriétés de l'espérance. En question (2c), il ne suffisait pas d'exclure $W = 1$ et $Z = 1$: il convenait également d'exclure $Z = W$, et de ne pas s'emmêler dans le décompte total. Il est arrivé que cette planche soit quasiment terminée après reprise.