

SESSION 2025

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Informations importantes

- * Les problèmes sont indépendants les uns des autres.
- * On peut utiliser les résultats de questions précédentes, en l'indiquant **au moment de les utiliser**.
- * Il est demandé de **soigneusement numéroté les questions**.
- * Il est demandé de **mettre les réponses en évidence**, en les **surlignant**, en les **encadrant**, ou, à minima, en les **soulignant**. L'utilisation de crayon de papier n'est pas recommandée.
- * Il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction.

PROBLEME A.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $M_k(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles $k \times k$, ainsi que I_k la matrice identité de $M_k(\mathbf{R})$. On considère l'application

$$a: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, y + 2z, z)$$

- (1) (1a) Montrer que a est une application linéaire et exprimer la matrice A représentant a dans la base canonique.
- (1b) La matrice A est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse A^{-1} .
- (1c) Calculer A^2 .
- (1d) Calculer $(A - I_3)^2$.
- (1e) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la trace $\text{Tr}(A^k)$ de la matrice A^k .
- (2) (2a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de a .
- (2b) La matrice A est-elle diagonalisable?

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_k[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k . On rappelle que la famille $\mathbf{B}_k = \{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \dots, x \mapsto x^k\}$ forme une base de $\mathbf{R}_k[x]$. Attention au fait que le j -ème élément de cette base est la fonction polynomiale $x \mapsto x^{j-1}$. On fixe un entier $n \geq 1$ et on considère l'endomorphisme

$$b: \mathbf{R}_n[x] \longrightarrow \mathbf{R}_n[x] \\ P \longmapsto x \mapsto P(x+1)$$

dont on note B la matrice dans la base $\mathbf{B}_n$.

- (3) (3a) Pour $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$, exprimer le coefficient $B_{i,j}$ d'indices i et j de la matrice B .
- (3b) Montrer que b est bijective et calculer l'application réciproque b^{-1} .
- (3c) On note B^{-1} la matrice de b^{-1} dans la base $\mathbf{B}_n$. Pour $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$, exprimer le coefficient $(B^{-1})_{i,j}$ d'indices i et j de la matrice B^{-1} .

(4) Déterminer l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de b .

On note $Id: \mathbf{R}_n[x] \rightarrow \mathbf{R}_n[x]$ l'endomorphisme identité.

(5) (5a) Donner l'image de $\mathbf{R}_0[x]$ par l'endomorphisme $b - Id$, c'est-à-dire l'image de la restriction de $b - Id$ au sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_0[x]$.

(5b) Pour $1 \leq k \leq n$, donner le noyau et l'image de la restriction de $b - Id$ au sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_k[x]$.

(5c) Calculer $(B - I_{n+1})^{n+1}$.

On définit les polynômes

$$E_0: x \mapsto 1, \quad E_1: x \mapsto x, \quad E_2: x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}, \quad \dots, \quad E_n: x \mapsto \frac{x(x-1) \cdots (x-(n-1))}{n!}$$

et on admet que la famille $E_n = \{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ forme une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

(6) Exprimer la matrice M de $b - Id$ dans la base E_n .

On fixe dorénavant un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et on note, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P_k: x \mapsto P(x+k).$$

(7) (7a) Pour $k \in \mathbf{N}$, exprimer P_k à l'aide de P et de l'endomorphisme b .

(7b) Trouver des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k = 0$.

(8) (8a) Soit $Q \in \mathbf{R}_n[x]$ un polynôme vérifiant $Q(x) = x^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction vérifiant $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Calculer Q .

(8b) Pour $k \in \mathbf{N}$, exprimer P_k dans la base B_n à l'aide des dérivées successives de P .

PROBLEME B.

Pour le moment, on fixe un entier $M \geq 3$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire U_n de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, M\}$. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_k$ sont indépendantes.

(9) (9a) Donner, *sans calcul*, l'espérance $E[U_1]$ de la variable aléatoire U_1 .

(9b) Donner, *sans calcul*, la variance $V[U_1]$ de la variable aléatoire U_1 .

On définit les variables aléatoires Y et W par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } U_1 \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad W = \begin{cases} 1 & \text{si } U_2 \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(10)(10a) Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.

(10b) Calculer l'espérance $E(Y + W)^2$.

Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de valeurs différentes que les n variables $U_1, U_2, \dots, U_n$ ont prises, c'est-à-dire que X_n est le cardinal de l'ensemble $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.

(11)(11a) Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.

(11b) Pour tout $n \geq 1$, donner l'ensemble des valeurs prises par X_n , c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} : P(X_n = x) > 0\}$.

(11c) Calculer l'espérance $E[X_2]$.

(12)(12a) Calculer la probabilité $P(X_3 = 3)$.

(12b) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_2 = 2 \mid X_3 = 2)$.

Pour $1 \leq k \leq M$, on note T_k le premier instant où l'ensemble $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ contient k éléments :

$$T_k = \min\{n \geq 1 : X_n = k\}.$$

(13)(13a) Donner sans justification la loi de T_1 .

(13b) Donner sans justification la loi de $T_2 - T_1$.

(13c) Donner sans justification la loi de $T_3 - T_2$.

(13d) Calculer l'espérance $E[T_3]$.

Pour $i \geq 1$, on note $h_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^i}$ et $v_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{i+1}}$.

(14)(14a) Montrer que

$$\text{pour } j \geq 1, \quad \int_j^{j+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{j} \quad \text{et, pour } j \geq 2, \quad \frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^j \frac{dx}{x}.$$

En déduire un encadrement de h_i pour $i \geq 2$.

(14b) Déterminer la limite de $(h_i)_{i \geq 1}$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

(14c) Justifier que la suite $(v_i)_{i \geq 1}$ converge vers une limite finie. *On ne demande pas d'explicitement la valeur de cette limite.*

On admet que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots, T_M - T_{M-1}$ sont indépendantes.

(15)(15a) Pour $1 \leq k \leq M - 1$, donner sans justification la loi de $T_{k+1} - T_k$.

(15b) Exprimer $E[T_M]$ en fonction d'un terme h_i pour un i bien choisi.

(15c) Exprimer $V[T_M]$ en fonction de termes h_i et v_i pour un i bien choisi.

(15d) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\frac{T_M}{Mh_M} - 1 \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(T_M)}{\varepsilon^2 M^2 h_M^2}$.

(15e) En déduire la limite de la probabilité précédente lorsque $M \rightarrow +\infty$.

PROBLEME C.

On considère la fonction

$$f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x e^{-x}.$$

(16)(16a) Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

(16b) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

(16c) Dresser le tableau de variation de f .

(17)(17a) Trouver les points d'inflexion de f .

(17b) Tracer le graphe de f , en faisant apparaître $f'(0)$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère maintenant la fonction

$$f_n : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x^n e^{-x}.$$

(18)(18a) Calculer $\int_0^{+\infty} f_0(x) dx$.

(18b) Calculer $\int_0^{+\infty} f_1(x) dx$.

(18c) Pour $n \geq 1$, exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ en fonction de $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(x) dx$.

(18d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(19) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donner un développement limité en 0 à l'ordre $n+3$ de f_n .

On considère une variable aléatoire X de densité f_1 .

(20)(20a) Calculer le moment d'ordre n de X .

(20b) Pour $t \in \mathbf{R}_+$, calculer la probabilité $P(X > t)$.

(20c) Pour s et $t \in \mathbf{R}_+$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X > t+s \mid X > t)$.

On introduit la fonction

$$g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto y e^{-|x|}.$$

(21)(21a) Calculer les dérivées partielles de g aux points où elles sont définies.

(21b) À x fixé, tracer le graphe de la fonction $y \mapsto g(x, y)$.

(21c) Trouver les extremums locaux de g .

(21d) Donner les équations des lignes de niveau de g .

(21e) Tracer la ligne de niveau $\frac{1}{2}$ de g .

On fixe un réel $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = g\left(\frac{u_{n-1}}{n}, n\right)$.

(22)(22a) Donner, pour tout $n \geq 1$, un encadrement de u_n .

(22b) Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On fixe un réel $w_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $w_n = g(w_{n-1}, n)$.

(23)(23a) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de limite finie.

(23b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $(n+1)e^{-ne^{-1}} \leq 1$.

On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $w_{n_1} \leq 1$.

(23c) Quelle est la limite de $(w_{n_1+2n})_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

(23d) Quelle est la limite de $(w_{n_1+1+2n})_{n \in \mathbf{N}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$?