Rapport sur le sujet de Maths 2025
XUSR filière PSI

Comme expliqué au début du sujet, l'objectif était d'étudier et d'établir certaines propriétés de l'algorithme de descente du gradient qui est intensément utilisé notamment dans les programmes d'intelligence artificielle. Pour éviter de perdre les candidats habituellement peu à l'aise avec les fonctions de plusieurs variables, le sujet se limitait pour l'essentiel à la dimension 1.

Après avoir établi l'existence d'un minimiseur dans les préliminaires, la première partie sous des hypothèses fortes montre que la convergence est rapide. On affaiblit ensuite les hypothèses sans perdre la convergence dans la deuxième partie et ensuite on étudie la descente de gradient proximale qui permet de se passer de l'hypothèse de dérivabilité. Dans la dernière partie, on passe en dimension quelconque et on étudie la variante dite projetée.

Voici quelques observations du jury question par question :

- (1-a) Les arguments ont souvent été flous pour montrer le caractère borné.
- (1-b) Le théorème des bornes atteintes est bien évoqué sur X mais la synthèse sur $\mathbb{R}$ tout entier a parfois été mal justifiée.
- (2-a) Quelques candidats ne parviennent pas à utiliser la croissance pour obtenir la majoration demandée.
- (2-b) Plutôt bien traitée mais certaines copies semblent tourner en rond.
- (2-c) Il suffisait de dire que f' s'annule en un minimiseur et de raisonner par récurrence.
- (3-4) Questions élémentaires bien traitées.
- (5) Il fallait partir de $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$ et raisonner selon le signe de x.
- (7) Des copies avec des calculs sans aucune justification notamment le fait que α-convexe implique convexe. La question n'a été que très rarement bien traitée.
- (8-9) Questions élémentaires bien traitées.
- (10-a) La décroissance est en générale bien démontrée mais souvent la positivité ne l'est pas. La construction d'un intervalle stable est en générale bien exhibée.
- (10-b) Il fallait bien justifier le calcul de la limite.
- (10-c) Peu de raisonnements corrects.
- (11) Il s'agissait de bien distinguer les différentes situations selon que $x_0 \leqslant 0$, $x_0 \geqslant 1/\tau$ ou $0 < x_0 < 1/\tau$: très peu de copies ont su le faire.
- (12-a) Attention aux développements limités sans petit o.
- (12-b) Très peu vu alors qu'il s'agissait simplement de dire que $Lx^2/2 - f(x)$ était convexe.
- (12-c) Il s'agissait de prendre $y = x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n)$ dans la question précédente.

(13) Il fallait prendre $y = x_*$.

(14) A partir des questions précédentes, on obtenait la majoration demandée avec $|x_n - x_*|$ à la place de $|x_0 - x_*|$, il suffisait alors d'invoquer d'après 2-c) la décroissance de $|x_n - x_*|$.

(15) Souvent très flou sur les inégalités, peu de copies ont obtenus des points sur cette question plutôt simple.

(16) Il s'agissait d'utiliser la question précédente avec $c = \tau(1 - \tau L/2)/(x_0 - x_*)^2$ et de justifier que a_n était positive par construction.

(17) L'inégalité demandée découlait de la question 14 et d'une somme télescopique. Il suffisait alors de dire qu'une série à termes positifs convergente a son terme général qui tend vers 0.

(18-a) Il suffisait de remarquer que d'après la question 2, la suite était bornée.

(18-b) Il fallait invoquer la continuité de f' et le fait que $f'(x_n) \to 0$.

(18-c) De nombreux candidats ont affirmé que lorsque f' s'annulait en un point a alors nécessairement a était un minimum sans utiliser la convexité de f.

(19) La stricte convexité découlait de celle de la norme : peu de candidats ont su détacher clairement cette propriété.

(20-21) Rarement abordées correctement.

(22-a) Il s'agissait de faire un tableau des variations suffisamment détaillé de F_{x_0} : presque jamais correctement fait.

(22b-23) Bien traitées quand les questions étaient abordées.

(24) Il s'agissait bien évidemment d'invoquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz mais encore fallait-il dire clairement comment.

(25-30) Questions très rarement abordées.

(31) Les candidats qui se sont aventurés dans cette dernière partie ont trouvé une question simple à traiter en invoquant le théorème des bornes atteintes.

(32) A ce stade du sujet le jury attendait un petit développement limité pour justifier la nullité du gradient.

(33-a) Le jury attendait le caractère strict dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Le reste du sujet n'a presque pas été abordé.

A l'évidence le sujet était très long avec de nombreuses questions à priori simples mais qui demandaient de la précision dans les arguments. Le jury a utilisé toute l'échelle des notes, allant de 0 à 20. La répartition des notes n'a pas révélé d'anomalies statistiques, ni phénomène de concentration ou de discontinuités avec une moyenne de 9,96 et un écart type de 3,37.