

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $s = p + q$.

- (1) Montrer que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors s est un projecteur.
- (2) Montrer que deux matrices semblables ont même trace. On peut donc parler de la trace d'un endomorphisme f , notée $\text{Tr}(f)$, qui correspond à la trace de toute matrice représentant f dans une base quelconque.

On suppose maintenant que s est un projecteur.

- (3) Montrer que $\text{Tr}(s) = \text{rg}(s)$.
- (4) Montrer que $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) = \text{rg}(s)$.
- (5) En déduire que $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) = \text{Im}(s)$, puis que $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) = \text{Im}(s)$.
- (6) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 2. On fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers strictement positifs. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- si la boule tirée est de couleur blanche lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
- si la boule tirée est de couleur rouge lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par B_n l'évènement « la boule tirée lors du n -ième tirage est blanche ». On considère également la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k$ pour $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$ on note enfin $p_n = P(\bigcap_{k=1}^n B_k)$.

- (1) Soit $k \geq 1$ un entier. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité $P(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i)$.
- (2) Montrer pour tout $n \geq 1$ on a

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}.$$

- (3) Montrer que les séries de terme général $\ln\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)$ et $\frac{1}{S_n}$ ont même nature.
- (4) Démontrer que la probabilité de ne jamais tirer de boule rouge est nulle si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{S_n}$ est divergente.

Remarque. On pourra utiliser le fait que si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'évènements telle que $A_{i+1} \subseteq A_i$ pour $i \geq 1$ alors $P(\bigcap_{i \geq 1} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On considère dans cet exercice $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, qui sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

(1) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{Tr}({}^t M M)$ est un réel positif, nul seulement si M est nulle.

(2) Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^n$.

(2a) Montrer que, pour tous x et y de $\mathbf{R}^n$, $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$.

(2b) En déduire que la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique, c'est-à-dire vérifie l'égalité ${}^t P = P$.

(3) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui lui est canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

On note de plus p le projecteur orthogonal sur $\text{Im } \varphi$ et P sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

(3a) Justifier que $PA = A$ et que $\text{Tr}(P) = \text{rg}(P) = \text{rg}(A)$.

(3b) En déduire que pour tout réel λ , $\text{rg } A + 2\lambda \text{Tr}(A) + \lambda^2 \text{Tr}({}^t A A) \geq 0$.

Indication. On pourra considérer $\text{Tr}({}^t(P + \lambda A)(P + \lambda A))$.

(3c) En déduire que $\text{Tr}(A)^2 \leq \text{rg}(A) \text{Tr}({}^t A A)$.

(4) Application. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (i \neq j \Rightarrow |a_{ij}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Montrer que $\text{rg}(A) \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 2. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} |f|$ et $\int_0^{+\infty} |f''|$ convergent. On admettra que pour une fonction continue $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g|$ converge, alors la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A g(t)dt$ existe et est finie. On la note $\int_0^{+\infty} g$.

(1) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt.$$

(2) Montrer que $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

(3) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |ff'|$ converge.

(4) Montrer que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

(5) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt = 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou face avec probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse à la longueur des deux premiers blocs de résultats identiques. Le premier bloc est de longueur n si les n premiers lancers ont donné un même côté de la pièce, et le $(n + 1)^{\text{ième}}$ lancer a donné l'autre côté. On note L_1 la longueur du premier bloc. Le deuxième bloc commence au lancer suivant le premier bloc et se termine au lancer précédant le deuxième changement de côté. On note L_2 la longueur du deuxième bloc.

Par exemple, si les lancers donnent $PPPFPP\dots$, alors $L_1 = 3$ et $L_2 = 2$. Et s'ils donnent $FPPPPF\dots$, alors $L_1 = 1$ et $L_2 = 4$.

- (1) (1a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer la probabilité $P(L_1 = n)$. Dans le cas particulier $p = q = \frac{1}{2}$, quelle est la loi de L_1 ?
- (1b) Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.
- (2) (2a) Pour tous entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$, calculer la probabilité $P((L_1 = n) \cap (L_2 = m))$.
- (2b) En déduire, pour $m \geq 1$ entier, la valeur de $P(L_2 = m)$.
- (2c) Montrer que L_2 admet une espérance et la calculer.
- (3) Comparer $E[L_1]$ et $E[L_2]$.

Exercice 2. Soit $d \geq 2$ un entier et $P(x) = a_1x + \dots + a_dx^d$ un polynôme avec $a_1, \dots, a_{d-1} \geq 0$ et $a_d > 0$. On considère une suite (u_n) définie par récurrence telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = P(u_n)$ pour $n \geq 0$.

- (1) Démontrer que la suite (u_n) converge lorsque $P(1) \leq 1$ et diverge vers l'infini lorsque $P(1) > 1$.
- (2) On suppose dans cette question que $P(1) > 1$ et on pose $w_n = \frac{\ln(u_n)}{d^n}$.
 - (2a) Montrer que la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge.
 - (2b) En déduire que w_n converge vers une limite strictement positive.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1.

- (1) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme u_0 est positif et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}} + 1.$$

- (1a) Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + 1$ possède une unique solution positive, qu'on notera λ , et donner le signe de $x - \sqrt{x} - 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

- (1b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite λ .

- (2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme v_0 est égal à u_0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \sqrt{v_{n-1}} + \frac{1}{n}.$$

- (2a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq v_n \leq u_n$. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- (2b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'implication $v_n \leq v_{n-1} \Rightarrow v_{n+1} \leq v_n$. En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.

- (2c) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 2. Soient $n \geq 3$ et $K \in \{2, \dots, n-1\}$.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

où le bloc supérieur gauche de taille $K \times K$ est rempli de 1, et, en dehors de ce bloc, seuls les coefficients de la première ligne et de la première colonne valent 1.

- (1) Trouver le rang et la dimension du noyau de A .
- (2) Trouver les valeurs propres de A .
- (3) La matrice A est-elle diagonalisable? Justifiez votre réponse.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup] \frac{1}{e}, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$.

- (1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable à droite en 0?
- (2) Étudier les variations de f et déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
- (4) Montrer qu'il existe une constante $c \in]0, 1[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \ell| \leq c|u_n - \ell|$.
- (5) En déduire que la série de terme général $\ln(u_n)$ est convergente.

Exercice 2. Soit $p \in]0, 1[$. Un système informatique est protégé par $K \geq 1$ barrières de sécurité consécutives. Un pirate tente de forcer le système de manière séquentielle comme suit. À chaque minute, le pirate tente de franchir la première barrière non encore franchie. Chaque tentative réussit avec probabilité p , indépendamment de toutes les autres. On note X_K le nombre total de tentatives nécessaires pour franchir les K barrières.

- (1) Calculer $E[X_K]$ ainsi que $V(X_K)$.
- (2) On suppose dans cette question que $K = 2$. Démontrer que pour tout $n \geq 2$ on a

$$P(X_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

- (3) On suppose toujours que $K = 2$. Sachant que le pirate a mis exactement $n \geq 2$ tentatives pour franchir les deux barrières, quelle est la probabilité que la première barrière ait cédé à la k -ième tentative (pour $1 \leq k \leq n-1$)?
- (4) Pour $n \geq K$, obtenir une formule la plus simple possible pour $P(X_K = n)$.
- (5) On note B_{n-1} une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n-1, p)$. Démontrer que

$$P(X_K \geq n) = P(B_{n-1} \leq K-1).$$

- (6) Montrer que pour tout $n \geq K$ on a

$$\sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{K-1} (1-p)^{i-K} = \sum_{i=0}^{K-1} \binom{n-1}{i} p^{i-K} (1-p)^{n-1-i}$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. La loi de Laplace est la loi de densité f donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de loi de Laplace. On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne associé.

(1) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

(2) Calculer $E[X_1^2]$ et en déduire la valeur de $E[\|X\|^2]$, où $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$.

(3) Calculer $E[X_1^4]$ et en déduire la valeur de $V(\|X\|^2)$.

(4) Montrer que

$$\sqrt{2n} \left| \|X\| - \sqrt{2n} \right| \leq \left| \|X\|^2 - 2n \right|.$$

(5) Montrer que la suite $\left(\frac{E[\|X\|]}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. Soient $n \geq 2$ un entier et $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que $0 < a_1 < \dots < a_n$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur colonne non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Montrer que $AX = \lambda X$ si et seulement si $S = (\lambda + a_1)x_1 = \dots = (\lambda + a_n)x_n$.

(2) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda + a_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$.

(3) Montrer que A est diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $n \geq 3$ et $0 < a_1 = a_2 < a_3 < \dots < a_n$. La matrice A est-elle encore diagonalisable? Justifiez votre réponse.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue bornée, et soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x}{a_n}} \frac{1}{a_n} dx.$$

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
- (2) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout réel $M > 0$, on a

$$I_n = f(0) + \int_0^M (f(a_n u) - f(0)) e^{-u} du + \int_M^{+\infty} (f(a_n u) - f(0)) e^{-u} du.$$

- (3) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 2. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

- (1) On considère une suite $A(k) = (a(k)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence

$$N(A - A(k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \forall 1 \leq i, j \leq n \text{ on a } a(k)_{i,j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_{i,j}.$$

Lorsque ces conditions sont remplies, on dit que la suite $A(k)$ converge vers A et on écrit $A(k) \rightarrow A$.

- (2) Démontrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on a $N(AB) \leq nN(A)N(B)$.
- (3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que si A est inversible, pour tout $k \geq 1$ on a $N(A^k)^{1/k} \geq \frac{1}{nN(A^{-1})}$.
- (4) Démontrer que si $A(k) \rightarrow A$, alors pour tout $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on a $UA(k)V \rightarrow UAV$.
- (5) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $A^k \rightarrow B$.
 - (a) Si B est inversible, montrer que A est la matrice identité.
 - (b) Montrer que si $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de A alors $-1 < \lambda \leq 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1.

- (1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$x + 1 < e^x < xe^x + 1.$$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \ln \left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \right).$$

- (2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien définie.
 (3) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décroît.
 (4) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.
 (5) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge quand n tend vers $+\infty$ et donner sa limite.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est *pseudo-inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$AB = BA, \quad ABA = A \quad \text{et} \quad BAB = B. \tag{1}$$

- (1) Démontrer que si A est inversible alors elle est pseudo-inversible.
 (2) On suppose que A est pseudo-inversible. Démontrer l'unicité de la matrice B vérifiant (1), appelée *pseudo-inverse* de A .
 (3) On suppose que A est pseudo-inversible et on note B son pseudo-inverse.
 (3a) Démontrer que $P = AB$ est un projecteur.
 (3b) Démontrer que $\text{Im } A \oplus \ker A = \mathbf{R}^n$.
 (4) Démontrer que si $\text{Im } A \oplus \ker A = \mathbf{R}^n$ alors A est pseudo-inversible.
 (5) Démontrer que si A est diagonalisable alors elle est pseudo-inversible.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Dans une rue infinie, les maisons sont numérotées par les entiers strictement positifs. Devant chaque maison, il y a une place de parking. On suppose que chaque place est occupée avec probabilité $3/4$, indépendamment des autres places.

On entre dans la rue au niveau de la maison 1, et l'on souhaite se garer au plus près de la maison numéro 100, sans faire de marche arrière. Pour cela, on adopte la stratégie suivante : on choisit un entier $k \in \{0, \dots, 99\}$, puis on ignore toutes les places situées avant la maison $100 - k$. À partir de la maison $100 - k$, on se gare à la première place libre rencontrée. On note X_k le numéro de la place où l'on se gare, et

$$\Delta_k = E[|X_k - 100|]$$

la distance moyenne à parcourir à pied.

- (1) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_k - 99 + k$?
- (2) Calculer Δ_0 .
- (3) Pour $k \in \{1, \dots, 99\}$, on note $A_k = \{\text{la place numéro } 100 - k \text{ est occupée}\}$. Montrer que l'on peut écrire

$$X_k = \mathbf{1}_{A_k} X_{k-1} + \mathbf{1}_{A_k^c} (100 - k).$$

- (4) En déduire une relation entre Δ_k et Δ_{k-1} .
- (5) Trouver deux réels a et b ne dépendant pas de k tels qu'en posant $u_k = \Delta_k + ak + b$, on ait, pour tout $k \in \{1, \dots, 99\}$, $u_k = \frac{3}{4}u_{k-1}$ et en déduire une expression de Δ_k .
- (6) Déterminer la valeur de k qui minimise Δ_k . Quelle stratégie optimale obtient-on ?

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$. Si $p(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \in E$, on définit $S(p) \in E$ par $S(p)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k$.

- (1) Justifier que S est un endomorphisme de E , démontrer que pour tout $p \in E$ on a $S(p)(x) = x^{2n} p(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et calculer $S \circ S$.
- (2) Démontrer que 1 et -1 sont les seules valeurs propres de S , et donner une base de leurs deux sous-espaces propres.
- (3) Soit p un vecteur propre de S associé à la valeur propre -1 . Démontrer que 1 et -1 sont des racines de p de multiplicité impaire.
- (4) Soit p un vecteur propre de S associé à la valeur propre -1 . Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(x)}{(1+x)^{2n+2}} dx = 0.$$

- (5) Soit p un vecteur propre de S associé à la valeur propre -1 . Démontrer que p ne peut pas être de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, notée tM .

- (1) Vérifier que si M est symétrique alors pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, M^k est symétrique.
- (2) Montrer que si M est symétrique, alors $\text{Tr}(M^2) \geq 0$. À quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique.

- (3) On suppose que $M^4 = I$. Simplifier $(M^2 - I)^2$ et $(M^3 - M)^2$, où I est la matrice identité d'ordre n . En déduire que $M^2 = I$.
- (4) On admet que M est diagonalisable. Montrer que s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $M^p = I$, alors $M^2 = I$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère n variables aléatoires réelles $X_1, \dots, X_n$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi, admettant une densité continue f . On note F leur fonction de répartition commune.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega)$$

la suite des $X_i(\omega)$ réordonnés par ordre croissant.

- (1) On suppose dans cette question que la loi commune des X_i pour $1 \leq i \leq n$ est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - (a) Justifier que Y_k admet une espérance pour tout $1 \leq k \leq n$.
 - (b) Montrer que Y_n et $1 - Y_1$ ont la même loi. Calculer $E[Y_n]$ et en déduire $E[Y_1]$.
- (2) Soit $1 \leq k \leq n$ un entier et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$P(Y_k \leq x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$

- (3) Soit $1 \leq k \leq n$ un entier. Montrer que Y_k admet une densité g_k avec

$$g_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

- (4) On suppose dans cette question que X_i suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Exprimer, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $E[Y_{k+1}]$ en fonction de $E[Y_k]$ et en déduire l'expression de $E[Y_k]$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. On définit un endomorphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ comme suit :

$$\text{pour } M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A.$$

- (1) Exprimer $f \circ f$ en fonction de f .
- (2) En déduire les valeurs propres possibles de f .
- (3) Montrer que A est vecteur propre de f pour une valeur propre λ_0 que l'on donnera.
- (4) Déterminer une base du sous-espace propre $E_{\lambda_0}(f)$.
- (5) Montrer que f admet une valeur propre $\lambda_1 \neq \lambda_0$, et déterminer la dimension de $E_{\lambda_1}(f)$.
- (6) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 2. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on considère n individus numérotés de 1 à n et l'on suppose que les relations de connaissance entre ces n individus sont générées de la façon suivante : pour chacune des $\binom{n}{2}$ paires non ordonnées d'individus distincts, il y a une relation avec probabilité p_n (et pas de relation avec probabilité $1 - p_n$), de façon indépendante.

On s'intéresse à la probabilité qu'il y ait des individus isolés dans ce réseau, c'est-à-dire des individus qui ne connaissent personne. Pour cela, on note I_n le nombre d'individus isolés. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable qui vaut 1 si l'individu i est isolé, et 0 sinon, alors

$$I_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (1) Calculer $E[I_n]$ et $E[I_n^2]$.
- (2) (2a) Montrer que $P(I_n > 0) \leq n(1 - p_n)^{n-1}$.
 (2b) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que pour tout n assez grand on a $p_n \geq \frac{(1+\varepsilon) \log n}{n}$. Démontrer que la probabilité qu'il y ait des individus isolés tend vers 0.
- (3) (3a) Montrer que $E[I_n]^2 \leq E[I_n^2]P(I_n > 0)$.
 (3b) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que pour tout n assez grand on a $p_n \leq \frac{(1-\varepsilon) \log n}{n}$. Démontrer que la probabilité qu'il y ait des individus isolés tend vers 1.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Étant donnés des réels α, β et γ , on note

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Justifier que T est inversible. Calculer N^2 et N^3 , puis $(I + N)(I - N + N^2)$, où I est la matrice identité d'ordre 3. En déduire que $T^{-1} = I + M$, où $M = N^2 - N$.
- (2) (2a) Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Montrer que l'on peut trouver $a \in \mathbf{R}^3$ tel que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$. Écrire alors la matrice U de u dans cette base.
 (2b) Soit v un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $v^2 = 0$ et $v \neq 0$. Montrer que $\dim \ker(v) = 2$ puis que l'on peut trouver $b \in \ker(v)$ et $c \in \mathbf{R}^3$ tels que la famille $(v(c), b, c)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$. Écrire alors la matrice V de v dans cette base.
- (3) On suppose dans cette question que $N^2 \neq 0$.
 (3a) En utilisant la question (2a), montrer que N est semblable à U .
 (3b) Calculer M^2 et M^3 et en déduire que M et N sont semblables, puis que T et T^{-1} sont semblables.
- (4) On suppose que $N^2 = 0$. Par un raisonnement proche du précédent, montrer que T et T^{-1} sont semblables.
- (5) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est semblable à une matrice du type T , alors A est inversible et est semblable à son inverse.

Exercice 2.

- (1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^{2n} - nx^{n+1} - nx^{n-1} + 1 = 0$ d'inconnue $x \in]0, 1]$, admet une solution et une seule, notée x_n .
- (2) Montrer que $x_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (3) Montrer que $nx_n^n \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1.

- (1) Soit f une fonction dérivable et de dérivée croissante sur un intervalle $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$.
 - (1a) Montrer que, sur l'intervalle $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$, la fonction f est au-dessus de sa tangente en a , c'est-à-dire de la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
 - (1b) En déduire que $f(a) \leq \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx$.
- (2) En déduire que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^3} \leq \frac{1}{2(n - \frac{1}{2})^2}$.
- (3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum a_n$ converge. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $h_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ et $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 a_k$.
 - (3a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $h_n \leq u_n$.
 - (3b) En utilisant la question (2), montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $\sum_{p=1}^n u_p \leq 2 \sum_{p=1}^n a_p$ et prouver finalement que la série $\sum h_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R}_n[X] \rightarrow \mathbf{R}_n[X] \\ P &\mapsto f(P)(x) = \frac{1}{2} \left(P\left(\frac{x}{2}\right) + P\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

- (1) Calculer $\dim \ker(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.
- (2) Déterminer les valeurs propres de f .
- (3) Est-ce que f est diagonalisable? Justifiez votre réponse.
- (4) Démontrer que $\int_0^1 f(P)(t) dt = \int_0^1 P(t) dt$ pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$.
- (5) Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $x \in \mathbf{R}$. Trouver la limite de $f^\ell(P)(x)$ lorsque $\ell \rightarrow \infty$, où f^ℓ désigne la composée ℓ fois de f .

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $a > 0$. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par récurrence comme suit :

$$u_1 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \text{ pour } n \geq 1.$$

- (1) Démontrer que si (u_n) converge alors elle converge vers 0.
- (2) Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$. Démontrer que pour tout $n \geq 2$ on a

$$w_n = \frac{\ln(a)}{2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k)}{2^k}.$$

- (3) Démontrer l'existence d'une valeur $C > 0$ telle que (u_n) converge vers 0 lorsque $a < C$ et (u_n) diverge lorsque $a > C$.

Exercice 2. Étant données trois variables aléatoires réelles X_1, X_2, X_3 finies (c'est-à-dire à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$) et définies sur un même espace probabilisé, la matrice carrée d'ordre 3 dont le terme de la i -ième ligne et j -ième colonne est $\text{Cov}(X_i, X_j)$ est appelée la *matrice de variance-covariance* du triplet (X_1, X_2, X_3) .

Pour tout réel λ , on note $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$

- (1) Dans cette question, on fixe un réel λ .
 - (1a) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_λ et préciser la valeur propre associée.
 - (1b) Montrer que le réel $1 - \lambda$ est valeur propre de M_λ et préciser l'espace propre associé.
 - (1c) En déduire que M_λ est diagonalisable et donner une base orthogonale de vecteurs propres.
- (2) Dans cette question, on fixe toujours un réel λ et on suppose l'existence d'un triplet (X_1, X_2, X_3) de variables aléatoires réelles finies dont la matrice de variance-covariance est M_λ .
 - (2a) Montrer que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, $V(aX_1 + bX_2 + cX_3) = {}^t U M_\lambda U$, où $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et ${}^t U$ désigne sa transposée. Qu'obtient-on lorsque $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_λ associé à une valeur propre μ ?
 - (2b) Montrer que $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$.
- (3) Soient maintenant trois variables aléatoires Z_1, Z_2, Z_3 réelles finies, indépendantes et toutes de variance 1, et soit α un réel. On pose $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$, et, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $X_i = Z_i + \alpha Z$.
Calculer $V(X_1)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2)$. En choisissant convenablement un réel $\beta \neq 0$, montrer que la matrice de variance-covariance du triplet $(\beta X_1, \beta X_2, \beta X_3)$ est de la forme M_λ , avec λ à exprimer en fonction de α .
- (4) Démontrer que M_λ est une matrice de variance-covariance d'un triplet de variables aléatoires réelles finies si et seulement si $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$.