

Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve orale de mathématiques 2026

Anna Ben-Hamou, Igor Kortchemski

Durée de l'épreuve. 90 minutes de préparation puis 30 minutes de passage, dont au plus 15 minutes de présentation sans intervention du jury.

Modalités. Deux exercices indépendants à préparer.

Calculatrice interdite

1 Commentaires généraux

Distribution des notes. Cette année, 69 personnes ont passé l'épreuve orale de mathématiques. La moyenne des notes s'élève à **11.54**, avec un écart-type de **3.84** et une médiane de **11.5**. Les notes sont distribuées comme suit.

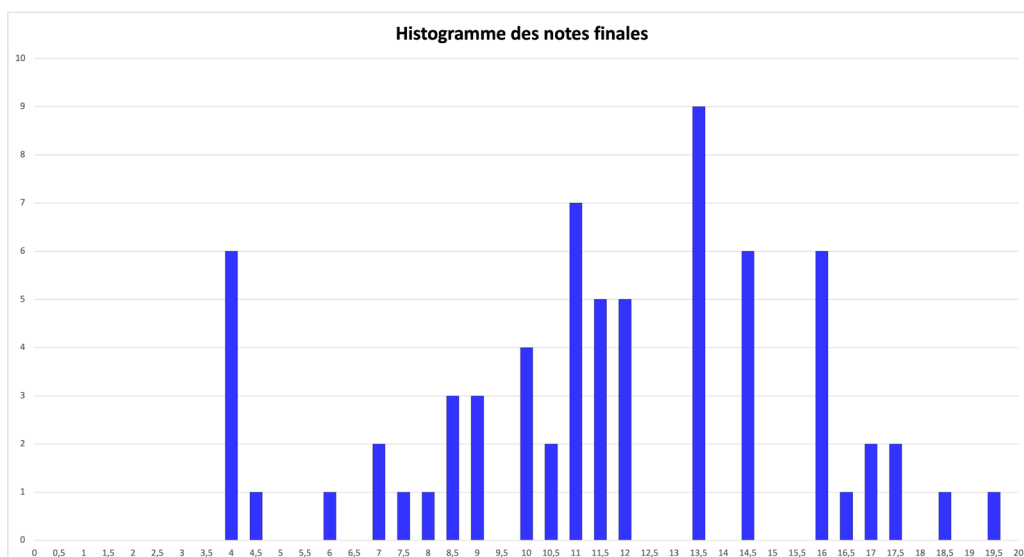


FIGURE 1 – Histogrammes des notes obtenues à l'oral.

Déroulement général de l'épreuve. Les candidates et candidats se voient remettre une planche comportant deux exercices. Ils disposent de 90 minutes pour préparer ces deux exercices. S'ensuit un oral de 30 minutes divisé en deux phases — la présentation, puis la reprise.

La phase de présentation dure au maximum 15 minutes, à l'initiative de la candidate et du candidat. Sans interruption de la part du jury, le candidat ou la candidate présente alors ses réponses ou pistes éventuelles concernant les questions abordées. Si la présentation atteint les 15 minutes, le jury intervient pour proposer de conclure en résumant très rapidement ce qui restait à présenter.

La reprise, qui occupe tout le temps restant de l'oral, consiste en un échange avec les deux membres du jury. Dans un esprit bienveillant, le jury pose des questions afin de clarifier certains arguments exposés en présentation et voir si, en étant accompagné, le candidat ou la candidate peut traiter certaines des questions laissées en suspens. Au fil de l'échange, il peut arriver qu'on s'éloigne un peu du sujet strictement abordé dans la planche : par exemple, s'il semble que le candidat ou la candidate a commis une certaine erreur concernant les projections orthogonales, on pourra lui demander des définitions ou résultats de cours relatifs aux projections orthogonales ; on pourra aussi poser une question qui n'est pas directement liée à l'exercice mais permet de tester spécifiquement l'erreur repérée. Dans les rares cas où une planche est terminée en présentation ou en reprise, le temps restant de la reprise est dédié à des questions supplémentaires, généralement ardues, qui prolongent la réflexion amorcée par les exercices de la planche.

Notation. La note finale a été obtenue en prenant en compte les critères suivants : connaissance du cours, autonomie sur les questions de base et les questions difficiles, absence d'erreurs grossières, réactivité et capacité à se corriger lors de la reprise, intuition et rédaction mathématique, et avancement global à l'issue de la reprise. Ces critères de notation permettent de distinguer les types de prestations orales suivantes :

- note ≤ 6 : le cours n'est pas bien maîtrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.
- note entre 6 et 10 : le cours est plutôt maîtrisé et/ou les candidates ou candidats accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit de la reprise.
- note entre 11 et 13 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidates ou candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.
- note ≥ 13 : le cours est bien maîtrisé, et les candidates ou candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.
- note ≥ 15 : le cours est bien maîtrisé, et les candidates ou candidats ont bien avancé de manière autonome dans les planches, réagissent bien aux indications du jury et ont résolu des questions délicates.

Il est à souligner que certains oraux n'ayant pas traité une fraction significative des questions dès la préparation ont toutefois pu obtenir de bonnes notes en sachant exploiter les indications du jury pour parvenir à bien avancer la résolution des exercices lors de la reprise.

Cette année la moyenne est en sensible baisse par rapport aux années précédentes, mais cette baisse ne doit pas être interprétée comme traduisant une évolution du niveau en mathématiques. En effet, cette année, des cibles communes de moyenne et d'écart-type ont été fixées pour les différentes épreuves, et les notes brutes ont été harmonisées pour satisfaire à ces objectifs. Nous demeurons très satisfaits par le niveau général en mathématiques.

Les notes des 25 personnes classées sur liste principale s'échelonnent de **12.5** à **20** avec une moyenne de **16.8**. Les toutes meilleures prestations relèvent d'une profonde maîtrise et d'une grande intuition mathématiques, et nous encourageons vivement ces candidates et candidats là à goûter aux enseignements du département de mathématiques de l'ENS-PSL.

Conception des planches. Chaque planche est conçue pour offrir une couverture thématique large (au moins 2 des 3 grands thèmes : algèbre, analyse, probabilités) et des questions de difficultés étalées et calibrées. On essaie également, autant que possible, de panacher questions standards et questions originales. Il est toutefois délicat de produire des planches tout à fait équivalentes : les écarts éventuels entre planches sont compensés par une notation prenant en compte ces écarts.

Présence du public. Les oraux se sont globalement bien déroulés. Le public respecte un silence total et ne manifeste aucune réaction jusqu'à la sortie du candidat. Il n'est pas bienvenu de se retourner avec insistance vers le jury, moins encore si c'est pour chercher à voir ce qu'il écrit.

2 Conseils

Dans leur immense majorité, les personnes interrogées sont bien préparées et, pour la plupart, à l'écoute du jury, réactives et agréables à interroger. Certaines prestations pourraient être améliorées en prenant en compte les points suivants.

2.1 Présentation

Gestion du tableau. Lors de la présentation, le jury n'intervient que pour mettre un terme à la présentation lorsque les 15 minutes imparties sont écoulées, ou en cas de force majeure (par exemple si les feutres fonctionnent mal). La gestion du tableau est laissée libre, cela fait partie de la présentation des résultats. Il est conseillé d'effacer le moins possible afin que le jury puisse plus facilement revenir sur certains points, et de demander l'accord du jury avant d'effacer.

Nous rappelons que, pendant la présentation, il n'est pas nécessaire de tout écrire (notamment les détails de calculs) mais qu'il est important de noter les points clés, surtout lorsqu'il peut y avoir ambiguïté (par exemple sur une inégalité large ou stricte). Il n'est pas non plus nécessaire de recopier une donnée de l'énoncé. Séparer le tableau en 3 ou 4 et écrire normalement suffit généralement à bien gérer son tableau. Naturellement, les candidates et candidats peuvent utiliser à leur gré les notes prises durant la phase de préparation.

Pistes infructueuses. Il est bienvenu de mentionner les pistes concrètes tentées lorsqu’une question n’a pas pu être résolue. Il est tout à fait possible d’exposer un raisonnement incomplet ou sur lequel on a des doutes, en disant très clairement quelles sont les limites du raisonnement. Ce point a été bien pris en compte par la plupart des admissibles.

Gestion du temps. Nous rappelons que, depuis 2021, la présentation dure 15 minutes maximum. Il ne faut pas chercher à utiliser absolument ces 15 minutes maximales allouées à la présentation : il est conseillé de **viser une durée comprise entre 10 et 13 minutes** pour cette phase. Rappelons que le dépassement des 15 minutes est pénalisé. Les personnes interrogées ayant excédé le temps imparti n’avaient pour la plupart pas fait l’exercice de synthèse et de hiérarchisation des résultats attendu dans cette partie. Nous conseillons de prendre un moment en préparation pour réfléchir à la gestion du temps.

Il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. En cas de doute, le jury reviendra sur les détails lors de la reprise. À l’inverse il convient d’éviter de parler trop vite ou de ne quasiment rien écrire au tableau.

Lorsqu’il reste moins d’une minute, la bonne conduite à adopter n’est pas d’augmenter le débit de parole ou de paniquer. Si ce qu’il reste à dire tient en une minute, c’est parfait. Dans le cas contraire, il faut sélectionner, parmi ce qu’il reste à présenter, les points clés principaux : il s’agit de les expliquer brièvement, surtout à l’oral et n’écrire que ce qui paraît vraiment essentiel, et négliger le reste.

2.2 Reprise et interaction avec le jury

Gestion du tableau. Lors de la reprise, nous encourageons à écrire au tableau, à la fois les indications du jury et les pistes de réflexion. Les formules énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d’interprétation. Toute prise d’initiative consistant à tenter des choses en les écrivant au tableau est fortement valorisée. À cette étape, il est important d’obtenir l’accord du jury avant d’effacer une partie du tableau.

Notes personnelles. Lors de la reprise, nous conseillons de laisser les notes de côté et de ne s’y référer que ponctuellement pour se remettre en mémoire un résultat non présenté. Nous encourageons plutôt à se concentrer sur l’échange en cours avec le jury, qui pourra rappeler tous les éléments utiles qui auraient été effacés.

Attitude du jury. Le jury, toujours bienveillant, cherche à évaluer le plus justement possible les candidates et candidats, et n’essaiera jamais de les « piéger ». En général, lorsqu’une personne est laissée sans indication en silence, c’est que le jury estime qu’elle a des chances de débloquer la situation par elle-même.

Dans la mesure du possible, le jury reste neutre dans son attitude et ne montre ni enthousiasme ni mécontentement. Ainsi, nous encourageons les candidates et candidats à ne pas chercher à interpréter les réactions du jury. Cela est valable tout au long de l’oral : il s’agit de ne jamais se décourager et de faire de son mieux jusqu’à la dernière minute. La présence de deux exercices et le découpage de l’oral en deux parties permettent une évaluation large ; une

difficulté passagère n'équivaut pas à une mauvaise note. Chaque année, quelques personnes connaissent un début difficile mais tirent remarquablement profit de la reprise.

Attitude des candidates et candidats. Les épreuves orales sont stressantes et le déroulement de l'oral, imprévisible par nature, peut être déstabilisant. Nous invitons les personnes interrogées à traiter le jury avec respect et à tenir compte de ses indications. Le jury peut avoir été dépassé par le rythme de certaines présentations et demander de répéter un point qui a été mentionné à l'oral. Cela ne signifie pas forcément que le point a été mal traité. A contrario, le jury demande fréquemment des précisions sur des points qui ont été traités de façon incomplète ou incorrecte. Dans ce cas, nous invitons les candidates et candidats à réagir. Se tromper est normal et le processus de correction fait partie des qualités évaluées.

Nous déconseillons les comportements suivants.

- Excès de confiance en soi. Ici, les candidates et candidats agissent comme s'ils ne comprendraient pas les questions qu'on pose, considérant les avoir déjà traitées de façon satisfaisante. Ces personnes répètent mot pour mot leurs arguments même quand le jury y revient avec insistance. Cette absence de remise en question, en plus de faire perdre beaucoup de temps, est pénalisée.
- Absence d'écoute du jury. Le jury propose une piste ou admet un résultat et le candidat passe outre et continue sur sa propre piste. Bien que cette dernière puisse aboutir dans certains cas (exceptionnels) et malgré la frustration que cela peut occasionner, nous invitons plutôt à suivre la piste proposée par le jury et à réfléchir ultérieurement à sa propre piste.
- Refus d'écrire. L'objet de la reprise est souvent de préciser les raisonnements. On demande donc d'énoncer les hypothèses des théorèmes, de traiter des cas simples, ou de construire des contre-exemples. Beaucoup de personnes ont de bonnes idées mais rechignent à écrire précisément les choses au tableau. Lorsque le jury le demande, une rédaction précise est attendue ; cela fait partie des compétences évaluées.
- Utilisation de notions hors programme. Rappelons que les « demi-souvenirs » peuvent amener à énoncer des énormités. Tous les exercices sont conçus pour être traités dans le cadre strict du programme officiel. Nous décourageons fortement l'emploi de notions et même de vocabulaire hors programme. L'utilisation de techniques hors programme n'est jamais valorisée par le jury. Nous observons de plus que ce type d'arguments est généralement mal maîtrisé. Nous proposons systématiquement d'autres pistes, plus simples et au programme, pour résoudre la question. C'est l'occasion de tester la réactivité de la personne interrogée.

3 Commentaires mathématiques

Dans cette section, on commence par un bilan de quelques écueils fréquents avant de passer à une analyse détaillée planche par planche.

Commentaires généraux.

- Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors (u_n/n) tend vers 0. Ce fait est généralement acquis mais dès qu'il s'agit de l'utiliser lors d'un passage à la limite dans une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n, n)$, les candidates ou candidats sont parfois désespérés et préfèrent garder le n dans la limite pour écrire « ℓ/n ». Voir par exemple la planche 4.
- La définition avec les quantificateurs de la limite a posé de nombreuses difficultés.

Planche 1. Les quatre premières questions du premier exercice d'algèbre linéaire portant sur des projecteurs ont été plutôt bien réussies. Les manipulations de la 5ème question fai-sant intervenir inclusions de sous-espaces vectoriels et des dimensions de sommes d'espaces vectoriels ont posé des difficultés. La dernière question n'a été résolue qu'une fois (et ce, dès la préparation).

Les deux premières questions ainsi que la dernière question de l'exercice de probabilités ont globalement été très bien réussies. Les candidates et candidats ont cependant manqué de précision sur les arguments de comparaison pour la question (3), et ont rarement su les redémontrer.

Planche 2. Le premier exercice visait à établir une inégalité entre la trace et le rang d'une matrice carrée, avec une application. Les questions (1) et (2) ont été bien traitées par tout le monde mais la question (3) a posé davantage de problèmes, certains candidats et candidates n'ayant pas su faire le lien entre le fait qu'un polynôme du second degré soit positif et le signe de son discriminant. Pour la dernière question, la majoration de la trace de ${}^tAA$ a parfois posé problème mais le résultat a généralement pu être obtenu en reprise. Pour le deuxième exercice, la question (1) a été résolue par tout le monde mais la question (2) n'a été traitée qu'en partie : si le fait que $f'(x)$ converge quand x tend vers $+\infty$ a souvent été démontré, le fait que la limite est nulle n'a pas pu être rigoureusement démontré. Probablement par confusion avec les séries, plusieurs candidats et candidates pensaient que si l'intégrale de $|f|$ converge, alors f tend vers 0 en $+\infty$. La question (3) n'a été faite en autonomie que par une personne. Plusieurs candidats et candidates ont pu faire la dernière question en admettant la précédente.

Planche 3. Le premier exercice de probabilités a été plutôt bien réussi, avec parfois quelques petites erreurs de calcul qui ont pu être corrigées à la reprise. Le deuxième exercice portant sur l'étude asymptotique d'une suite définie par récurrence était difficile. Le cas $P(1) \leq 1$ a été globalement très bien traité dès la préparation, et le cas $P(1) > 1$ a pu être traité à la reprise avec un peu d'aide. La question (2a) n'a pas été résolue, et pour la question (2b) plusieurs candidates et candidats ont pu démontrer la convergence de la suite sans montrer que la limite était strictement positive (l'erreur consistant à passer à la limite l'inégalité stricte $w_n > 0$ a été commise plusieurs fois).

Planche 4. Dans la question (1) du premier exercice, il s'agissait d'étudier la convergence de la suite définie par la donnée de u_0 et la relation $u_n = f(u_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, avec $f : x' \rightarrow \sqrt{x' + 1}$. La question (1a) a été globalement bien traitée mais pour la question (2b), certains candidats et candidates ont confondu f et $g : x' \rightarrow x - f(x)$. Si le fait que la seule limite possible

était λ a généralement été observé, peu de personnes ont pensé à distinguer les cas $u_0 \leq \lambda$ et $u_0 > \lambda$. La première partie de la question (2a) a souvent été bien traitée par récurrence, mais pour la deuxième partie, le jury a plusieurs fois entendu que la suite (u_n) était majorée par λ . Pour la question (2b), plusieurs personnes ont réussi à montrer l'implication mais en ont déduit que la suite était décroissante. Enfin, pour la question (2c), le jury a vu écrit plusieurs fois $\ell = \sqrt{\ell + 1}$. Pour le deuxième exercice, tous les candidats ont montré que la matrice était de rang 3 et que la dimension du noyau était $n - 3$, et plusieurs candidats ont remarqué que pour $n \geq 4$, 0 était valeur propre, de multiplicité $n - 3$. Aucun candidat ou candidate n'a pu traiter entièrement la question (2) mais plusieurs personnes ont choisi de traiter le cas $n = 3$ (ce qui était une bonne initiative). Plusieurs personnes ont semblé surprises d'arriver à une équation « trop compliquée » pour λ et ont pensé s'être trompées. Une personne avait pourtant trouvé le bon polynôme du 3e degré. Il ne s'agissait alors pas de déterminer explicitement les racines de ce polynôme mais de montrer qu'il avait 3 racines distinctes.

Planche 5. Le début du premier exercice a été bien traité, mais la troisième question a posé des difficultés pour démontrer la convergence de la suite. La question (4), difficile, n'a pas été résolue, même si plusieurs personnes ont proposé d'utiliser l'inégalité des accroissements finis. Le deuxième exercice de probabilités, plus original, a posé des difficultés lors de la préparation, notamment la première question, mais a globalement bien été compris à la reprise. La dernière question n'a été résolue qu'une seule fois.

Planche 6. Dans le premier exercice, on considérait un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ dont les entrées correspondent à des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi de Laplace, et on s'intéressait à l'espérance de la norme de ce vecteur. Si les premières questions (1) et (2) ont été globalement bien réussies, le calcul de la variance de $\|X\|^2$ a souvent posé problème. Une seule personne a pensé à utiliser l'indépendance des (X_i) avant d'appliquer la formule de Koenigs-Huygens. Les candidates et candidats qui ont commencé par appliquer Koenigs-Huygens devaient alors calculer $E[\|X\|^4]$ et plusieurs ont eu des difficultés à développer le carré. La question (4) a généralement pu être faite, au moins en reprise. Le maniement des valeurs absolues, nécessité par les (4) et (5), n'était pas toujours maîtrisé. Une personne a néanmoins pu aller jusqu'au bout en reprise. L'exercice 2 mêlait algèbre linéaire et analyse. La question (1) a généralement été bien réussie, mais les questions (2) et (3) n'ont été bien traitées en autonomie que dans un cas.

Planche 7. Cette planche a été difficile pour les candidates et candidats. Le premier exercice, assez court, a posé plusieurs fois des difficultés dès la première question. La troisième question, qui nécessitait de passer par les « ε » n'a quasiment pas été avancée, y compris à la reprise. Le début du deuxième exercice, portant sur des convergences de matrices, a été abordé par l'ensemble des candidates et candidats, mais il fallait faire attention à la précision des arguments, notamment justifier que le max portait sur un nombre fini de valeurs et faire attention à la manipulation des valeurs absolues.

Planche 8. L'exercice 1 a été globalement bien réussi et plusieurs candidates et candidats ont pu arriver jusqu'au bout. Il faut tout de même mentionner que la justification du fait que

la limite est nulle en question (4) était parfois imprécise (on ne pouvait pas dire que l'équation $\ell = f(\ell)$ avait comme unique solution $\ell = 0$, puisque la fonction f n'était pas définie en 0). Dans l'exercice 2, on introduisait la notion de matrice pseudo-inversible. Si la question (1) a été bien faite par toutes les candidates et candidats, la question (2) n'a pu être faite qu'en reprise avec une indication. Les questions (3a) et (3b) ont été plutôt bien traitées. La question (4) était probablement la plus difficile. Attention : $\text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A) = \mathbf{R}^n$ n'implique pas que A est un projecteur. Deux personnes ont pu résoudre la question (5) : l'une en utilisant la question (4), l'autre en explicitant la matrice B à partir de $A = PDP^{-1}$.

Planche 9. Le premier exercice a globalement été bien compris, et les premières questions ont pu être résolues en corrigeant parfois quelques maladrotes. La question (4), plus difficile, a été résolue une fois dès la préparation ; il s'agissait d'écrire $|X_k - 100| = \mathbf{1}_{A_k} |X_k - 100| + \mathbf{1}_{A_k^c} k$. La suite de l'exercice a parfois été discutée. La première moitié du deuxième exercice, mêlant endomorphismes et polynômes, a été bien résolue, parfois avec un peu d'aide. Si la plupart des candidates et candidats ont bien démontré que 1 et -1 étaient des racines à la question (3), le caractère impair de leur multiplicité était une question très difficile dont la résolution n'a été approchée qu'une fois. La question (4) a été résolue une fois dès la préparation, et la question (5) a été discutée une fois.

Planche 10. Le premier exercice a été globalement bien réussi. Les deux premières questions ont généralement été bien traitées (mais attention, montrer que ${}^t(M^k) = ({}^tM)^k$, ce n'est pas montrer que M^k est symétrique). Pour la question (3), tout le monde a établi que $(M^2 - I)^2 = -(M^3 - M)^2$ mais personne n'a pensé à utiliser les questions (1) et (2) pour en déduire rigoureusement que $M^2 = I$. Cela a néanmoins pu parfois être fait en reprise. La question (4) n'a été bien réussie en autonomie que dans un cas. Dans l'exercice 2, on considérait le ré-arrangement croissant d'un échantillon i.i.d., avec le cas particulier de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Certains candidats et candidates ont eu du mal à bien comprendre le problème, et ne semblaient pas voir la différence entre la loi de $(Y_1, \dots, Y_n)$ et la loi de $(X_1, \dots, X_n)$. Le jury a ainsi plusieurs fois entendu que la loi de Y_n , comme celle de $1 - Y_1$, était la loi uniforme sur $[0, 1]$. Un candidat a néanmoins pu aller jusqu'à la question (2) en autonomie. Mais les questions (3) et (4) n'ont pu être réellement abordées, même en reprise.

Planche 11. Cette planche a été globalement bien réussie. Les 4 premières questions du premier exercice d'algèbre linéaire ont été bien réussies souvent dès la préparation. Le calcul de la dimension à la 5ème question a posé davantage de difficultés, et dans quelques cas la recherche d'une base de $E_{\lambda_1}(f)$ a été proposée à la reprise. Dans l'exercice 2, plusieurs candidates et candidats ont bien réalisé que les variables aléatoires (X_i) n'étaient pas indépendantes. Les questions (1) et (2a) ont souvent pu quasiment être résolues après la reprise, et la question (2b) a été commencée plusieurs fois. La suite n'a pas été abordée.

Planche 12. Le premier exercice a été plutôt bien traité, même si peu de candidats ont pu le traiter entièrement. En outre, les conditions sur a, b, c dans les questions (2a) et (2b) n'ont généralement pu être bien identifiées qu'en reprise. Le deuxième exercice était difficile, dès la première question qui n'était pas immédiate et pouvait être résolue en dérivant deux fois,

ce qui a été remarqué par certains candidats. Pour la question (2), la plupart des candidats ont cherché à montrer que la suite (x_n) était monotone, alors qu'une approche plus directe, consistant à montrer que x_n devient plus grand que n'importe quel $a \in]0, 1[$ à partir d'un certain rang, s'avérait plus probante.

Planche 13. Pour l'exercice 1, de nombreuses candidates et candidats ont simplement évoqué la convexité pour la question (1a). Cette notion étant hors programme, il fallait résoudre « à la main » cette question, par exemple en considérant la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. La question (1b) a été bien traitée. La première inégalité de la question (3b) a pu être résolue une fois, et la question (3a), difficile, n'a pas été résolue. L'exercice 2 a été globalement bien abordé par les candidates et candidats, qui ont pensé à écrire la matrice de f dans la base canonique. La dernière question n'a jamais été abordée.

Planche 14. Les deux premières questions de l'exercice 1 ont été globalement bien traitées, même si, pour la question (1), on a plusieurs fois vu $\ell = \frac{\ell}{n}$. Plusieurs candidats ont compris comment montrer la question (3) mais n'ont pas su établir la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$, ce qui a néanmoins pu être fait en reprise. Le but de l'exercice 2 était d'établir

qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ était une matrice de variance-covariance si et seulement si $-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$. La question (1) a généralement été bien traitée mais plusieurs candidats ont eu du mal à développer la variance d'une somme de trois variables aléatoires à la question (2). Un candidat a pu aller jusqu'à la question (3).