Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques

—— o ——

Membres du jury : Emmanuel Jacob, Louise Gassot, Hélène Léman, Benoît Loisel, Arthur Marly

Coefficients de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission, modifiés pour tenir compte de l'absence d'oraux à la session 2020) :
- Paris-Saclay : 10,3 %
- Lyon : 7,8 %
- Paris : 15,0 %
- ENPC : 40 %

Le sujet en quatre parties s'intéresse à divers aspects de l'équation de la chaleur uni-dimensionnelle sur un segment, et de discrétisations de celle-ci. L'épreuve a permis de tester la qualité de raisonnement et de rédaction des candidats, ainsi que leurs compétences techniques sur des aspects variés du programme de mathématiques de BCPST : équations différentielles, probabilités, analyse réelle, calcul matriciel et diagonalisation.

Il est à souligner que cette année, en raison des modalités particulières du concours (l'absence d'oraux), toutes les copies ont été corrigées, contrairement aux dernières années où seules les copies des admissibles étaient corrigées. Sur les 614 copies corrigées, sept copies ont obtenu moins de 1/20 et quatre plus de 19/20. La moyenne a été de 8,45/20, pour un écart-type de 3,55.

Dans l'ensemble, les copies montraient une assez bonne connaissance des techniques de calcul ou des résultats au programme concernant les équations différentielles ou le calcul matriciel, mais moins d'aisance en probabilités (indépendance, Théorème Central Limite), et parfois de sérieuses lacunes sur les mathématiques et les raisonnements les plus basiques (différence entre nombres réels et nombres entiers, entre fonction non nulle et fonction qui ne s'annule pas, utilisation des quantificateurs, non-division par zéro).

10% des copies ne montraient pas de tels problèmes et traitaient convenablement une large part des trois premières parties du problème. Toutefois, chaque partie possédait au moins une question ayant résisté à près de la totalité des candidats (questions I.2.b, II.7, III.5 et partie IV).

Partie I

Dans la **partie I**, on s'intéresse à la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et au comportement asymptotique de sa fonction de répartition, après renormalisation en temps et en espace.

La **première question** explicite la loi de la marche au temps n ainsi qu'une relation de récurrence simple sur les probabilités de présence de la marche. Dans la **question 1.(b)**, de nombreux candidats ont voulu expliciter l'ensemble A_n (ce qui n'était pas nécessaire pour répondre la question) et n'y sont pas parvenus. En particulier, beaucoup de candidats ont affirmé à tort

$$\ll \frac{n+k}{2} \in [\![0,n]\!] \text{ si et seulement si } n+k \in [\![0,2n]\!] \gg,$$

sans doute induits en erreur par la notation proposée $[\![0,n]\!]$. La **question 1.(c)** pouvait être traitée par un simple raisonnement probabiliste (en précisant un argument d'indépendance) ou par des manipulations sur des coefficients binomiaux, mais cette deuxième option s'est révélée délicate pour nombre de candidats ayant manipulé des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sans se poser la question de si k était dans $[\![0, n]\!]$ ou non.

La **deuxième question** établit la convergence des fonctions de répartition correctement renormalisées. Dans la **question 2.(a)**, il suffisait d'appliquer le théorème central limite, mais encore fallait-il préciser à quelle suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on l'appliquait. La **question (b)**, nécessitant l'introduction d'une suite définie avec une partie entière et l'étude de sa convergence, s'est révélée particulièrement délicate.

Les **questions 3 et 4** écrivaient la fonction de répartition renormalisée $F(x,t)$ sous la forme $\int_{-\infty}^{x} f(y,t)\mathrm{d}y$, avec f la densité gaussienne, vérifiant l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Elles nécessitaient de faire un changement de variable linéaire et de calculer des dérivées, et ont été traitées correctement par la plupart des copies. Notons toutefois que beaucoup de copies oublient de dire qu'une fonction est dérivable, avant de calculer sa dérivée.

Partie II

Dans la **partie II**, on s'intéresse à une équation aux dérivées partielles assez similaire à la partie 1, mais avec un terme supplémentaire, et définies sur $[0, 1]$, avec condition de nullité au bord. Plus précisément, on cherche toutes les fonctions de deux variables $u(x, t)$ qui sont différentes de la fonction nulle, et qui s'écrivent comme produit de deux fonctions d'une variable $f(x)g(t)$.

La **première question** demande de montrer qu'alors les deux fonctions f et g non plus ne sont pas nulles. Cette question élémentaire a été correctement rédigée par moins de la moitié des candidats, ce qui a particulièrement étonné et déçu le jury.

Dans les **questions 2 et 3**, on montre que si u est solution, alors il existe un paramètre réel λ pour lequel les fonctions f et g sont solutions de deux équations différentielles linéaires simples, du premier et du deuxième ordre, donc au programme. Beaucoup de copies n'ont pas correctement introduit λ, ou ont divisé par $f(x)$ sans introduire x ni vérifier que $f(x)$ est non nul, ce qui a bien entendu été sanctionné.

Les **questions 4, 5 et 6** demandaient, selon la valeur du paramètre λ, de résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{1}{2}f''(x) + mf'(x) = \lambda f(x),$$

puis de spécifier l'existence - ou non - de solution non nulle vérifiant les conditions au bord $f(0) = f(1) = 0$. Ces questions sont donc des applications assez directes des résultats du programme et ont été correctement traitées par la majorité des candidats. Toutefois, pour les **questions 4.(a) et 6.(a)** qui peuvent vraiment être vues comme de simples questions de cours, le jury attendait un minimum de rédaction, et pas de simplement recopier le résultat de la question. On pouvait mentionner qu'il s'agissait d'une équation linéaire de second membre, expliciter l'équation caractéristique associée, éventuellement citer le résultat utilisé. Une rédaction trop elliptique a pu être sanctionnée, en particulier lorsque les élèves n'ont pas su fournir les bonnes valeurs de r_+ et r_-, ou fournir la forme des fonctions solutions dans la question 5.

Dans la **question 6.(b)**, étonnamment, peu de candidats ont correctement résolu l'équation $\sin(\pi l) = 0$, d'inconnue l. En particulier, peu de candidats ont noté que l'inconnue l était par construction un réel positif, ce qui excluait les solutions négatives.

La **question 7** conclut le raisonnement par condition nécessaire mis en place dans l'ensemble de la partie 2. Pour une solution u non nulle de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$, on doit nécessairement avoir f de la forme

$$f(x) = b\sin(\pi lx)e^{-mx},$$

avec $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $l \in \mathbb{N}^*$, et g de la forme

$$g(t) = ce^{\lambda t},$$

avec $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\lambda = \lambda(l) = -m^2/2 - \pi^2 l^2/2$. Réciproquement, on vérifie alors que les couples de fonctions (f, g) de la forme ci-dessus fournissent les solutions u désirées. Le nombre de copies ayant correctement rédigé cette question de synthèse est extrêmement faible.

Partie III

Dans la **partie III**, on s'intéresse à la diagonalisation d'une matrice de Toeplitz tridiagonale M de taille n, dont les entrées non nulles sont strictement positives.

La **première question** traitait le cas $n = 2$. Cette question pouvait se faire de manière élémentaire (résolution de système 2-2) ou alors en utilisant des connaissances algébriques un peu plus avancées (en argumentant que le déterminant du système doit être nul, voire en parlant directement de polynôme caractéristique), mais il fallait alors bien justifier, en particulier si le candidat utilisait des notions hors-programme. Cette question a néanmoins été bien traitée par de nombreux candidats, visiblement aguerris face aux diagonalisations de matrices de petite taille.

La **deuxième question** fournissait des vecteurs remarquables sur lesquels la multiplication à gauche par M se prête à un calcul explicite, permettant en particulier d'exhiber n vecteurs propres $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, associées à n valeurs propres $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}$. Le calcul nécessitait une formule trigonométrique simple et un peu d'agilité dans les notations matricielles. La trigonométrie n'a généralement pas posé de problème, tandis que les manipulations matricielles se sont révélées plus discriminantes. Peu de candidats ont pensé à traiter séparément le cas de la première et de la dernière ligne, qui pouvait nécessiter d'observer que l'on a $\sin(i(n+1)\pi/(n+1)) = 0$.

La **troisième question** proposait une petite digression, en se proposant de prouver que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice quelconque A, forment une famille libre. Il s'agit certes d'un résultat classique connu par un assez grand nombre de candidats, mais le sujet ne laissait que peu de doutes quant à la nécessité de reprouver ce résultat. Le jury a tout de même accordé quelques points aux copies qui utilisaient et mentionnaient précisément le résultat connu.

La méthode proposée ici est plutôt analytique, puisqu'elle se propose de considérer le comportement asymptotique d'un suite obtenue en itérant la multiplication à gauche par A à une combinaison linéaire des vecteurs propres considérés. Lorsque les valeurs propres sont strictement positives (**question 3.(a)**), ce comportement asymptotique est dicté par la plus grande valeur propre parmi les vecteurs propres apparaissant dans la combinaison linéaire.

Sans cette hypothèse supplémentaire (**question 3.(b)**), il y a essentiellement deux manières d'adapter l'approche:

- S'intéresser aux valeurs absolues des valeurs propres. Le raisonnement s'adapte aisément lorsque celles-ci sont distinctes, mais devient bien plus technique lorsque ce n'est pas le cas.
- Se ramener au cas de valeurs propres positives en ajoutant à la matrice A un multiple de la matrice identité, ce qui ne change pas les vecteurs propres mais translate toutes les valeurs propres.

Aucune copie n'a correctement traité la question avec la première approche (technique) ou la deuxième (astucieuse). Ceci dit les copies ayant entamé la première approche ont pu être récompensées. Un certain nombre de candidats ont également pu répondre à la fois aux questions (a) et (b) par une méthode différente de celle proposée dans l'énoncé, et ont évidemment également été récompensés.

La **quatrième question** montrait la convergence de la suite de matrices $\frac{1}{(\lambda^{(1)})^k} M^k$ vers une matrice N dont les colonnes sont des multiples de $X^{(1)}$. Pour cela, on pouvait effectuer un changement de base, les vecteurs propres trouvés dans la question 2 formant une base d'après la question 3, et observer que $\lambda^{(1)}$ est la valeur propre de plus grande valeur absolue, en utilisant le fait que les paramètre a, b et c sont strictement positifs.

Un nombre non-négligeable de candidats ont su effectuer un changement de base assez convaincant. Par contre, peu d'entre eux ont pensé à vérifier que $\lambda^{(1)}$ était la valeur propre de plus grande valeur absolue.

La **cinquième question** se proposait de montrer que la matrice N est à coefficients strictement positifs. Pour montrer que ses coefficients sont positifs ou nuls, il suffit d'argumenter que la matrice M elle-même est à coefficients positifs ou nuls, ce que n'ont pas manqué de remarquer nombre de candidats. Montrer le caractère non nul de ces coefficients était bien plus délicat, et aucun candidat n'a d'ailleurs trouvé de preuve convaincante.

Une manière de faire était de se ramener au cas où les valeurs propres sont strictement positives, puis de procéder par l'absurde et de supposer que la j-ème colonne de N est nulle. Dans ce cas, en prenant i minimal tel que $\alpha_{i,j} \neq 0$, on a $i \in [\![2, n]\!]$, et alors la j-ème colonne de $\frac{1}{(\lambda^{(i)})^k} M^k$ converge vers le vecteur $\alpha_{i,j} X^{(i)}$, qui doit être à termes positifs ou nuls. On obtient alors une contradiction en observant que les coefficients du vecteur $X^{(i)}$ ne sont pas de signe constant.

Partie IV

Enfin, la dernière partie demandait la diagonalisation d'une matrice de taille $n + 2$, dont 1 est une valeur propre double triviale, et dont on pouvait deviner, par similarité avec la matrice de la partie 3, les n valeurs propres restantes (assez facilement), mais aussi les vecteurs propres associés (un peu plus difficilement).

Pour conclure le sujet de manière plus ouverte, cette matrice s'interprète également comme la matrice de transition d'une marche aléatoire assez similaire à celle de la partie I, mais restreinte à $[\![1, n+2]\!]$, et absorbée en 1 et en $n + 2$. Il est alors naturel d'imaginer que faire tendre n vers l'infini et appliquer un procédé de renormalisation comme dans la partie I, amènerait naturellement à l'équation aux dérivées partielles étudiée dans la partie 2. Enfin, dans les solutions particulières $u(x, t) = f(x)g(t)$ étudiées dans la partie II, la fonction f joue un rôle similaire à celui des vecteurs propres de la matrice M. Il n'est donc pas si surprenant que ces fonctions ressemblent fortement aux vecteurs propres exhibés dans les parties III et IV.

Cette dernière partie plus ouverte n'a été significativement abordée que par un tout petit nombre de candidats, mais a permis d'en mettre en valeur quelques-uns, particulièrement méritants.