Banque MP Inter-ENS - Session 2021
Rapport relatif à l'épreuve orale de Maths Ulm

Laure Dumaz et Romain Tessera

École concernée : ENS Ulm
Coefficient (en pourcentage du total d'admission) : 27,8% (pour les 2 options)

Nous félicitons les candidats et leurs professeurs pour leur préparation. Le niveau était globalement très élevé et nous avons apprécié les discussions mathématiques que nous avons eues avec les candidats.

1 Sur les thèmes choisis

Nous avons essayé de couvrir une grande partie du programme MPSI-MP avec les sujets proposés.

- La réduction des endomorphismes est le sujet favori des candidats qui maîtrisent manifestement bien cette partie du cours même s'il y a parfois eu quelques fautes grossières ou des confusions lorsque l'exercice mêlait d'autres parties du programme.
- La plupart des candidats ont semblé désemparés face aux exercices de probabilités. Peu d'entre eux pensent à appliquer l'inégalité de Markov à $f(X)$ pour f une fonction bien choisie. Le conditionnement est aussi une source de confusion (les candidats conditionnent par des événements de probabilité nulle et utilisent de façon intempestive les conditionnements sans que cela soit nécessaire). Les candidats ne pensent pas à faire des disjonctions simples d'événements, et sont parfois incapables d'écrire les événements qui les intéressent avec des unions ou intersections dénombrables d'événements. Plutôt que d'exploiter ces propriétés de base, certains candidats se précipitent à écrire l'espérance comme une somme.
- Les performances des candidats en analyse ont été globalement décevantes. Les candidats doivent connaître les hypothèses exactes des théorèmes au programme. Nous avons parfois noté trop d'empressement à utiliser des intégrations par parties ou des changements de variables sans prendre le temps d'analyser la situation. De même, une réflexion heuristique est utile afin de choisir la formule de Taylor la mieux adaptée au contexte. Face à un problème faisant intervenir une interversion limite/intégrale, un outil central à avoir en tête est le théorème de convergence dominée...
- L'algèbre hors réduction a donné lieu à des performances hétérogènes des candidats. Ceux-ci semblent notamment mal à l'aise avec la notion de groupe.

Le hors-programme n'est pas souvent utilisé à bon escient : certains candidats ont été désavantagés par leurs connaissances pas assez abouties. Nous conseillons aux candidats de se concentrer le plus possible sur la bonne maîtrise des notions au programme, plutôt que d'accumuler des connaissances peu maîtrisées.

2 Sur les exercices posés

Dans nos exercices, nous avons voulu privilégier une démarche “recherche”. Ainsi, tous les énoncés qui s'y prêtaient ont été posés de façon ouverte. Parfois, il fallait trouver la bonne formulation de l'énoncé. Cela n'a pas semblé déstabiliser la plupart des candidats qui ont pu montrer leur inventivité et leur bonne compréhension des objets en question. Les exercices donnés étaient souvent difficiles à résoudre sans indication : les candidats doivent en être conscients et rester combatifs lorsqu'ils bloquent sur sa résolution.

3 Attitude attendue des candidats

- **Ce n'est pas une épreuve de vitesse !** Un bon nombre de candidats veulent aller trop vite, sans prendre le temps de bien formuler leur pensée et écrivent des choses imprécises ou fausses.
- **Clarté et transparence.** Nous encourageons les candidats à être le plus clair possible dans leur discussion avec l'examinateur. Ne pas hésiter à dire qu'ils se sont trompés lorsque c'est le cas par exemple. Le candidat doit expliquer où il en est, et ce qu'il essaye de faire. A contrario, il est de mauvais effet de parler sans discontinuer et sans prendre le temps de réfléchir.
- **Le candidat est seul maître à bord !** Ce n'est pas à l'examinateur de corriger les erreurs du candidat. Certains candidats tentent plusieurs pistes, et attendent que l'examinateur valide l'une d'entre elles. Insistons bien sur le fait que ce n'est pas son rôle : nous attendons d'un candidat qui pense avoir résolu une question qu'il prenne la peine de vérifier par lui-même que son raisonnement est juste.
- **Autonomie.** Nous avons privilégié la liberté des candidats en les laissant explorer leurs propres intuitions et voir où elles les menaient. Cette démarche implique que nous restions discrets, voire silencieux pendant la première partie de l'oral. Ce silence ne doit pas déstabiliser les candidats. Certains candidats, perdus pendant la première partie de l'oral ou qui n'avançaient pas beaucoup, ont finalement réussi à trouver une idée pour démarrer. Un oral où l'examinateur intervient peu est en général signe que le candidat fait preuve d'autonomie.

4 Evaluation

La note n'est pas nécessairement une fonction croissante de l'avancée sur l'exercice. Un candidat qui a eu de bonnes idées et les a développées de façon claire et correcte mais qui n'a pas réussi à aller au bout de l'exercice peut avoir une très bonne note. Inversement certains candidats ont pu se voir attribuer une note moyenne alors qu'ils étaient allés au bout de l'exercice, mais avec beaucoup d'aide. Pour cette raison, nous encourageons les candidats à rechercher la précision et l'autonomie, et nous les exhortons à rester positifs et persévérants jusqu'à la fin de l'oral.

Les erreurs mathématiques non corrigées spontanément par le candidat ont été lourdement sanctionnées. Certains candidats partent dans la bonne direction mais sont trop imprécis et commettent de nombreuses erreurs : c'est dommage !

En résumé les 4 critères principaux qui nous ont guidés sont : l'inventivité, l'autonomie, la clarté et la précision. Ce n'est que dans un second temps que nous avons pris en compte la vitesse du candidat.

5 Quelques (rares) fautes impardonnables...

- Un polynôme unitaire de degré d qui annule un endomorphisme de $M_d(\mathbb{K})$ n'est pas nécessairement le polynôme caractéristique.
- Le rayon spectral d'une matrice non symétrique n'est pas en général égal à sa norme d'opérateur.
- Certains candidats ne connaissent pas les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Les formules de Taylor ou leurs hypothèses ont pu être mal restituées.
- On ne peut pas conditionner par un événement de probabilité nulle. Il vaut mieux décomposer les événements avec une somme totale d'événements plutôt que de conditionner (ce qui demande plus d'explications).

6 Quelques exercices posés

Voici certains des exercices posés lors de cette session 2021.

Exercice 1 (Somme aléatoire de variables i.i.d.)**.** Soient $(X_k, k \geq 1)$ des variables i.i.d. à valeurs réelles d'espérance finie. Pour tout $k \geq 0$, on note $S_k := X_1 + \cdots + X_k$ avec $S_0 = 0$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

La variable aléatoire S_N a-t-elle une espérance finie ?

Exercice 2 (Continuité des racines d'un polynôme)**.** On se donne $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Énoncer et démontrer un énoncé traduisant l'idée que "les racines dépendent continûment des coefficients".

Exercice 3 (Un théorème de Frobénius)**.** Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ à coefficients ≥ 0. On note

$$d_i = \mathrm{pgcd}\{k \mid (A^k)_{ii} > 0\}.$$

1. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $(A^k)_{ij} > 0$ alors $d_1 = 1$.

On suppose maintenant que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A^k)_{ij} > 0$ et $d_1 = 1$.

2- Montrer que $d_i = 1$ pour tout i.

3- Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $(A^k)_{ij} > 0$.

Exercice 4 (Application convexe)**.** Montrer que toute application convexe $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne.

Exercice 5 (Intégrale oscillante)**.** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n(x) = ng(x/n)$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(t) \sin(\omega_n(t)t) dt,$$

pour toute $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (Transformée de Stieltjes)**.** Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{z-u} du$$

Vérifier que G est bien définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Comment retrouver f à partir de G ?

Exercice 7 (Théorème de Stein)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires avec un deuxième moment uniformément borné, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 telle que f et f' sont bornés, $\mathbb{E}[f'(X_n) - X_n f(X_n)] \to 0$.

(ii) Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \int f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$.

Exercice 8 (Graphe infini d'Erdös–Rényi)**.** Soit $(X_{i,j})_{i\leq j}$ une famille de variables aléatoires de Bernoulli i.i.d de paramètre 1/2. Un graphe est un ensemble de sommets reliés par des arêtes. On considère le graphe aléatoire G dont les sommets sont les entiers naturels $\mathbb{N}$ et tel que pour toute paire $\{i, j\}$, i est relié à j par une arête du graphe G si $X_{i,j} = 1$.

Soit $\hat{G}$ une copie indépendante de G (mêmes sommets notés $\hat{\mathbb{N}}$ et les paires choisies suivent des Bernoulli i.i.d. indépendantes du premier graphe).

Montrer que G et $\hat{G}$ sont isomorphes (i.e. construire $\phi : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$ bijective tel que i relié à j par une arête de G ssi $\phi(i)$ relié à $\phi(j)$ par une arête de $\hat{G}$).