Banques MP Inter-ENS - Session 2021

Rapport relatif à l'épreuve oral commune de math ULCR

Le jury était composé de Christine Huyghe, Joseph Lehec, Pierre Lissy, et Tristan Robert. L'épreuve est commune à plusieurs concours, le poids relatif de l'épreuve pour chacun de ces concours est indiqué dans le tableau suivant, il est exprimé en pourcentage du total des épreuves (écrites et orales) arrondi à l'entier le plus proche.

Ulm MP et MPI	Lyon MP et MI	Paris-Saclay MP et MPI	Rennes MP et MPI	Ulm Info	Lyon Info (M)	Paris-Saclay Info
14%	11%	15%	15%	13 %	11%	13%

Il y avait 460 admissibles et le jury a effectivement fait passer 445 candidates, divisées à parts à peu près égales entre les quatre examinateurs. Les notes s'étalent de 6 à 20, la moyenne s'établit à 13,5, la note médiane à 14 et l'écart-type à 2,45. Les notes sont donc typiquement plus resserrées que pour les épreuves écrites ce qui signifie que le *coefficient effectif* de l'épreuve est probablement un peu moins élevé que ce qui est indiqué dans le tableau précédent.

1 Déroulement des épreuves

Les mesures sanitaires anti-covid ont été scrupuleusement respectées pendant toutes les épreuves.

1. Chaque candidat était interrogé au tableau par un des examinateurs, sans temps de préparation. La durée officielle d'une interrogation étant de 45 minutes, le tiers-temps ouvrait le droit à un quart d'heure supplémentaire.
2. Les énoncés étaient dictés aux candidates. Dans le cas d'un énoncé comptant plusieurs questions celles-ci étaient en général données une par une.
3. En début d'oral, après avoir dicté l'exercice, l'examinateur laissait en général passer cinq à dix minutes sans intervenir, à moins d'être sollicité par le candidat.
4. Passé ce temps de réflexion libre, l'examinatrice commençait à interagir avec la candidate, typiquement en posant une question de cours en lien avec l'exercice. Dans la plupart des cas, la résolution des questions se fait ainsi dans le cadre d'un échange constructif entre la candidate et l'examinatrice.

On détaille un peu ci-dessous certains aspects du déroulement de l'oral.

Formulation de l'exercice. Il est attendu des candidats qu'ils retranscrivent les énoncés in extenso au tableau, en respectant les notations de l'examinateur. À cette étape, le candidat doit absolument intervenir pour lever toute ambiguïté dans une formulation. La durée d'une planche est trop courte pour gérer d'éventuels quiproquo.

Début de planche. La difficulté du début de la planche est variable. Parfois les énoncés commencent par des questions faciles destinées à familiariser la candidate avec le contexte général de l'exercice et à favoriser l'assimilation du problème. Dans ce cas on attend de la candidate qu'elle repère que ce sont des questions faciles, et qu'elle ne traine pas trop à les résoudre.

Dans d'autre cas, la première question de l'énoncé est déjà difficile. On n'attend pas alors de la candidate qu'elle sache tout de suite la résoudre, mais qu'elle se familiarise avec l'énoncé, qu'elle en comprenne les difficultés et commence à réfléchir à la manière de les surmonter. Il y a alors deux écueils à éviter: celui de vouloir aller trop vite et de se lancer au hasard dans des calculs sans avoir vraiment réfléchi au problème, et son contraire, qui consiste à rester les bras croisés en attendant que l'examinatrice donne une indication.

Corps de la planche. Le dialogue est alors engagé. À ce niveau il est important que le candidat explique clairement quelles sont ses idées et sache aussi écouter les éventuelles indications de l'examinateur. La mise en œuvre technique est aussi très importante : avoir de bonnes idées ne suffit pas, encore faut-il savoir donner des solutions précises et rigoureuses. Il est aussi préférable d'écrire tous les détails d'une démonstration au tableau : en général l'examinateur ne se contentera pas d'un optimiste et superficiel : « On voit bien que… »

Évaluation. La note n'est pas uniquement fonction du degré d'avancement de la solution à la fin de l'oral. Elle dépend des interactions qu'il y a eu entre la candidate et l'examinatrice au cours de l'oral, ainsi que de la difficulté de l'exercice. Notons à ce sujet que la plupart des exercices ont été donnés huit fois (deux fois de suite avec quatre examinatrices en parallèle). Il est toujours préférable d'éviter les erreurs de raisonnement, mieux vaut prendre le temps de la réflexion plutôt que de parler trop vite, mais un oral est un tout et faire une erreur à un moment n'est pas nécessairement rédhibitoire, surtout si la candidate s'en rend compte d'elle-même. Les notes inférieures à 10 étaient en général réservées aux candidates pour lesquelles un réel problème avait été détecté, typiquement un résultat de cours important non su, ou bien des erreurs de raisonnement grossières.

2 Qualités attendues des candidats

- **Connaissance du cours.** Une parfaite connaissance du cours est la condition sine qua non du succès lors de l'épreuve et de la réussite au concours. Il tombe sous le sens que savoir son cours permet de résoudre les exercices. De plus, à l'oral, il est très facile à l'examinatrice de poser une question de cours, parfois pour simplement donner une indication, ou plus prosaïquement pour tester la candidate. Il est alors bien entendu rédhibitoire qu'un point important du cours lui ait échappé.
- **Attention au hors programme.** Rappelons d'abord une évidence, les exercices sont tous conçus pour être résolus dans le cadre du programme. Néanmoins le contenu du cours n'étant manifestement pas le même d'une classe ou d'un lycée à l'autre, des notions hors programme ont ainsi pu être traitées en cours dans certaines classes. Certaines de ces notions peuvent parfois faciliter la résolution d'un exercice, mais c'est un jeu un peu dangereux. Rappelons qu'un candidat souhaitant utiliser un résultat hors programme doit s'attendre à ce que l'examinateur lui demande de le démontrer. De plus, l'examinateur pourra être amené à vérifier que la notion est réellement maitrisée, et si ce n'est

pas le cas, le candidat sera bien sûr sanctionné.
- On attend des candidates qu'elles démontrent des qualités de future chercheuse: savoir mener un dialogue scientifique constructif avec une scientifique, cerner les difficultés, faire progresser sa réflexion, résoudre le problème posé de façon rigoureuse.
- Travailler et surtout chercher par soi-même la solution des exercices durant les années de préparation au concours est primordial. Il n'est pas très utile de bachoter bêtement tous les exercices vus dans l'année. L'examinateur se rend vite compte qu'une solution a été apprise par cœur, surtout quand finalement le candidat se met à hésiter car il ne connaît plus la suite. Au contraire, on retiendra toujours beaucoup mieux un raisonnement qu'on a fait soi-même et qu'on saura reproduire dans un contexte voisin.
- Ce point a déjà été évoqué à la section précédente, mais on attend de la candidate une certaine autonomie et un certain dynamisme. Même si l'énoncé est difficile, il ne faut pas être passif mais proposer des pistes, réfléchir sur des exemples, cerner les difficultés. L'examinatrice sera toujours prête à suggérer des pistes et à engager la discussion mais attend de la candidate qu'elle réfléchisse et que cette réflexion débouche sur des suggestions pertinentes.
- Il faut bien sûr présenter une solution qui soit parfaitement rigoureuse mais il ne faut pas non plus être paralysé par la peur de dire une bêtise. Un *calcul formel* ne sera pas sanctionné s'il est présenté comme tel et un excès de rigueur peut parfois être préjudiciable. Par exemple cela fait mauvais effet de perdre dix minutes à essayer de montrer que les conditions d'une interversion série intégrale sont réunies sans avoir regardé si la dite interversion donnait quelque chose d'exploitable.
- L'échange avec le candidat doit être fluide et le candidat doit être capable de s'expliquer clairement, ce qui fut le cas la plupart du temps lors de cette session d'oraux. Il est aussi important que le tableau soit bien lisible, ce qui fut aussi très majoritairement le cas.
- L'aisance technique des candidates est aussi évaluée, on attend d'elles qu'elles soient capables de mener à bien un calcul un peu compliqué en temps raisonnable et sans faire des erreurs de signe à chaque ligne.

3 Quelques remarques spécifiques sur le programme

Le jury est globalement satisfait de la maîtrise du programme par les candidats, mais a pu constater des disparités assez nettes dans la connaissance des différentes parties du programme.

- Le programme d'algèbre linéaire est globalement bien maîtrisé, en particulier tout ce qui concerne la réduction des endomorphismes. Certains candidats ont néanmoins oublié que le lemme de décomposition des noyaux s'applique aussi sur un corps non algébriquement clos. Signalons aussi une maladresse assez fréquemment rencontrée, qui consiste à traîner des matrices de passage tout le long d'un exercice, plutôt que simplement se placer dans une base de vecteurs propres et de faire les calculs directement dans cette base. Le point de vue uniquement matriciel peut parfois obscurcir le problème.
- Le programme sur les espaces euclidiens et les matrices symétriques réelles pose parfois quelques problèmes. Par exemple, il n'était pas clair pour toutes les candidates qu'une matrice orthogonale préservait la norme euclidienne. Il faut aussi vraiment avoir compris pourquoi une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Enfin, et cela rejoint la remarque précédente, il peut être utile de se placer dans une base orthonormale de vecteurs

propres pour un produit scalaire, plutôt que de traîner une matrice de passage inutile. Bizarrement, certaines candidates n'étaient pas à l'aise avec la notation entre crochets d'un produit scalaire, préférant le noter matriciellement. Il est bien entendu nécessaire d'utiliser la notation la plus pertinente pour résoudre un problème.

– Le programme d'analyse, notamment les théorèmes de convergence classiques sont eux aussi plutôt bien maîtrisés, malgré quelques accidents surprenants, comme des candidats qui ne connaissent pas le théorème de convergence dominée, ou ses variantes, ou alors qui le maitrisent mal. Par exemple, on attend des candidats d'avoir compris que pour obtenir la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre réel il suffit d'avoir une hypothèse de domination uniforme sur tout compact, et pas forcément uniforme sur toute la droite réelle.
– Le jury a constaté que la théorie des probabilités était beaucoup moins bien maitrisée que les autres parties du programme. Par exemple, une part non négligeable des candidates a du mal à énoncer l'inégalité de Markov, notamment en hésitant sur le sens de l'inégalité.
– Dans une moindre mesure le calcul différentiel fait aussi figure de parent pauvre du programme. Par exemple la question de savoir quel est le gradient du carré de la norme euclidienne a été étonnamment discriminante, et certains candidats croient qu'une norme sur un espace vectoriel de dimension finie est différentiable. La notion de vecteurs tangents à une partie de $\mathbb{R}^n$ n'est pas non plus toujours bien assimilée.

4 Exemples d'exercices

Exercice 1. Soient A et B deux matrices non proportionnelles de $M_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $Tr({}^tAM)B - Tr({}^tBM)A$ est-il diagonalisable?

Exercice 2.
1. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que $AB = BA = Id$ si et seulement si $det\,A \in \{-1,+1\}$. On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{Z})$ telles que $det\,A \in \{-1,+1\}$. Montrer que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{Q})$.
2. Soit $v = {}^t(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $pgcd(a_1,\ldots,a_n) = 1$. Montrer alors qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{Z})$, de déterminant 1 ou -1, dont la première colonne est égale à v.
3. Soient $u,v \in \mathbb{Z}^n$. A quelle condition le résultat précédent se généralise-t-il? Justifier.

Indications éventuellement données aux candidats:

- Commencer par $n = 2$.
- Pour n quelconque, cela revient à montrer qu'il existe une matrice inversible A de $GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $A.X = {}^t(1,0,\ldots,0) = E_1$.
- Pour la généralisation, il faut supposer que l'idéal engendré par les mineurs d'ordre 2 de la famille (u,v) est égal à $\mathbb{Z}$, soit, les mineurs $\Delta_{i,j} = a_ib_j - a_jb_i$ sont premiers entre eux.

Exercice 3. Les chapeaux de n invités ont été mélangés dans le vestiaire. À la sortie les chapeaux sont redistribués au hasard. Déterminer la loi du nombre d'invités qui retrouvent leur chapeau. Calculer son espérance et sa variance. Étudier aussi la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $\int_{\mathbb{R}} P = 1$. On suppose dans toute la suite que

$log(f)P$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}} \log(f(x))P(x)dx\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}} f(x)P(x)dx.$$

On considère dorénavant
$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Soient $c > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose
$$I_y^c = \mathbb{R} \setminus [-c+y,c+y] \text{ et } \; \delta_c(y) = \int_{I_y^c} P(x)dx.$$

2. Calculer explicitement $\delta_c(y)$. Montrer que $\mu_c := \inf_{y\in\mathbb{R}} \delta_c(y) \in]0,1[$ et donner sa valeur.
3. (a) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} fP = 1$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}} \log(f)P(x)dx\right) \leqslant 2\left(\int_{I_y^c} f(x)P(x)dx\right)^{\mu_c}.$$
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp\left(\int_{\mathbb{R}} \log(f)P(x)dx\right) \leqslant 2\left(\int_{I_y^c} f(x)P(x)dx\right)^{\mu_c}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)P(x)dx\right)^{1-\mu_c}.$$

Exercice 5. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ telle que $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1,...,x_{n-1},\varphi(x))$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et de réciproque $\mathcal{C}^1$. On définit $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \, \varphi(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in S$. Soit $X \in \mathcal{C}^1(]-1;1[;\mathbb{R}^n)$ une solution de l'EDO $\begin{cases} X'(t) = G(X(t)) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$ avec $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in S$, $G(x) \in T_xS$. Montrer qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $t \in]-\delta;\delta[$, $X(t) \in S$.

Indications éventuellement données aux candidates:

- Commencer par déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à S en $x_0 \in S$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ telle que $f \equiv 0$ sur S. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de $x_0 \in S$ et $g : \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = \varphi(x)g(x)$ sur U.