École Normale Supérieure
Sélection Internationale 2017
Épreuve de Mathématiques discipline principale

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Merci d'utiliser des copies séparées pour l'exercice 1 et les trois parties de l'exercice 2.

Il est possible de passer une question et de supposer son résultat connu pour résoudre une question ultérieure.

Notations

- On utilise les notations $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour les corps des nombres réels et complexes, respectivement.
- Étant donné un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathbb{K}[T]$ l'anneau des polynômes en une variable T et par $\mathbb{K}[X, Y]$ l'anneau des polynômes en deux variables X, Y.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. On note respectivement $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ les parties réelle et imaginaire de z.
- On note i l'une des racines carrées de -1 dans $\mathbb{C}$.
- Étant donnés k, n deux entiers positifs ou nuls, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binômial:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$
- Si E est un ensemble fini, alors $\sharp E$ désigne le cardinal de E.

***

Exercice 1

Un *mot* est une suite finie (éventuellement vide) de lettres. La suite vide est appelée *mot trivial* et notée e. Soit W l'ensemble des mots formés uniquement des lettres a et b. Étant donnés w_1 et w_2 deux mots de W, la *concaténation* de w_1 et w_2 notée $w_1 * w_2$ est le mot obtenu en écrivant successivement w_1 et w_2. Par exemple, pour $w_1 = ab$ et $w_2 = bab$, on a $w_1 * w_2 = abbab$. Remarquons que e est un élément neutre pour l'opération $*$, c'est-à-dire que $e * w = w * e = w$ pour tout $w \in W$.

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs. On définit la *longueur* d'un mot $w \in W$ par
$$|w|_{\alpha,\beta} := p\alpha + q\beta$$
où p (resp. q) est le nombre d'occurrences de la lettre a (resp. b) dans w. Par exemple, si $w = abbab$, alors
$$|w|_{\alpha,\beta} = 2\alpha + 3\beta .$$

Par définition, le mot trivial a pour longueur 0.

Pour tout $t > 0$, définissons

$$N_{\alpha,\beta}(t) := \sharp\{w \in W \mid |w|_{\alpha,\beta} \leq t\} \ .$$

Le but de ce problème est d'estimer la croissance de $N_{\alpha,\beta}(t)$.

(1) Calculer $N_{\alpha,\alpha}(t)$.

(2) Montrer que, pour tout $t, s > 0$, on a

$$N_{\alpha,\beta}(t+s) \leq N_{\alpha,\beta}(t) N_{\alpha,\beta}(s+m)$$

où $m = \max(\alpha, \beta)$. En déduire que

$$\frac{1}{t} \log\left(N_{\alpha,\beta}(t)\right)$$

converge vers un $\delta \geq 0$ lorsque t tend vers $+\infty$.

(3) Soit z un nombre complexe. On définit

$$S(z) := \sum_{w \in W} e^{-z|w|_{\alpha,\beta}} \ .$$

Montrer que la série $S(z)$ converge absolument lorsque $\mathfrak{Re}(z) > \delta$ et diverge lorsque $\mathfrak{Re}(z) < \delta$.

(4) Montrer que pour $\mathfrak{Re}(z) > \delta$, on a

$$S(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}} \ .$$

En déduire que δ vérifie

$$e^{-\delta\alpha} + e^{-\delta\beta} = 1 \ .$$

(5) Montrer que

$$\delta \geq \frac{2\log(2)}{\alpha + \beta} \ ,$$

avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta$.

***

Exercise 2

Partie I.

On dit qu'un polynôme $f \in \mathbb{R}[T]$ est *hyperbolique* si toutes les racines de f sont réelles. Un polynôme f de $\mathbb{C}[T]$ est dit *stable* si $f(z) \neq 0$ lorsque $\mathfrak{Im}(z) > 0$.

Soit f un polynôme de $\mathbb{R}[T]$ de degré strictement positif d.

(1) Montrer que f est hyperbolique si et seulement s'il est stable.

(2) Supposons que f est hyperbolique. Montrer que

(2.1) le polynôme $T^d f(\frac{1}{T})$ est hyperbolique, et

(2.2) la dérivée f' de f est hyperbolique.

(3) Supposons que $f = \sum_{i=0}^{d} a_i T^i$ est hyperbolique. Montrer l'inégalité

$$\frac{a_{k-1}}{\binom{d}{k-1}} . \frac{a_{k+1}}{\binom{d}{k+1}} \leq \left(\frac{a_k}{\binom{d}{k}} \right)^2,$$

pour tout entier $1 \leq k \leq d-1$.

Partie II.

Deux polynômes hyperboliques $f, g \in \mathbb{R}[T]$ sont *entrelacés* si

(i) $|\deg(f) - \deg(g)| \leq 1$ et

(ii) il existe un ordre $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_i \leq \beta_i \ldots$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les racines d'un des deux polynômes et $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sont les racines de l'autre polynôme (comptées avec multiplicité).

Si les inégalités de (ii) sont strictes, on dit que f et g sont *strictement entrelacés.* En d'autres termes, deux polynômes hyperboliques sont strictement entrelacés s'ils sont à racines simples et si l'intervalle ouvert entre deux racines consécutives quelconques de l'un d'entre eux contient une racine de l'autre.

Étant donnés deux polynômes f et g, on note $W[f, g] := f'g - g'f$.

(4) Soient f et g deux polynômes hyperboliques. Montrer que f et g sont entrelacés si et seulement s'il existe des polynômes hyperboliques h, f_1 et g_1 tels que $f = hf_1$, $g = hg_1$ et f_1 et $g_1$sont strictement entrelacés.

(5) Soient f et $g \in \mathbb{R}[T]$ deux polynômes hyperboliques strictement entrelacés. On va démontrer ci-dessous (5.4) que $f + ig$ ou $f - ig$ est stable.

(5.1) Monter que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, le polynôme $\alpha f + \beta g$ est hyperbolique et n'a que des racines simples. En déduire que $W(f, g)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(5.2) Supposons par l'absurde qu'il existe z_1 et z_2 satisfaisant $\mathfrak{Im}(z_1), \mathfrak{Im}(z_2) > 0$ et tels que $f(z_1) + ig(z_1) = f(z_2) - ig(z_2) = 0$. Montrer qu'il existe z satisfaisant $\mathfrak{Im}(z) > 0$ et tel que

$$2i(f(\bar{z})g(z) - f(z)g(\bar{z})) = 0 \ .$$

(5.3) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que

$$\alpha f(z) + \beta g(z) = 0 \ .$$

(5.4) Conclure.

(6) Réciproquement, soient $f, g \in \mathbb{R}[T]$ deux polynômes tels que le polynôme $p = f + ig$ soit stable.

(6.1) Montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}[T]$ et $p_1 \in \mathbb{C}[T]$ tels que $p = hp_1$ et les racines de p_1 aient une partie imaginaire strictement négative.

(6.2) À partir de maintenant, on suppose que les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de p ont une partie imaginaire strictement négative. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\mathrm{Im}(z) > 0$, on a

$$2i(f(\bar{z})g(z) - f(z)g(\bar{z})) = |p(z)|^2 - |p(\overline{z})|^2 \geq 4|p(\bar{z})|^2 \cdot \mathfrak{Im}(z) \cdot \sum_{k=1}^{d} \frac{-\mathfrak{Im}(\alpha_k)}{|\bar{z} - \alpha_k|^2} \ .$$

(6.3) En déduire que f et g sont hyperboliques et que $W(f, g) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

(6.4) Montrer que f et g sont entrelacés.
Indication: on pourra dériver la fraction rationelle f/g.

Partie III

On dit qu'un polynôme $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ est *stable* si $f(z_1, z_2) \neq 0$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\mathfrak{Im}(z_1) > 0$ et $\mathfrak{Im}(z_2) > 0$.

(7) Monter que $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ est stable si et seulement si, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2_{>0}$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$, le polynôme $f(x + Tv) \in \mathbb{C}[T]$ est stable.

(8) Soient A, B et C des matrices symétriques de taille $d \times d$ à coefficients réels telles que A et B soient semi-définies positives. Monter que le polynôme

$$\det(XA + YB + C) \in \mathbb{R}[X, Y]$$

est soit nul soit stable.

(9) Soit $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ un polynôme stable de degré d. Supposons de plus que les équations $f(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial X}(x, y) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial Y}(x, y) = 0$ n'ont pas de solution commune dans $\mathbb{R}^2$. Soit Z l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

(9.1) Montrer que $Z \subset \mathbb{R}^2$ est une union disjointe de courbes lisses.

(9.2) Déterminer le nombre de composantes connexes de Z, la topologie de ces composantes connexes et la topologie de $\mathbb{R}^2 \backslash Z$.