École Nomale Supérieure Paris
Sélection Internationale 2017
Épreuve de mathématique discipline secondaire

Exercice 1

Soit n un nombre entier strictement positif. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ formé par les polynômes réels de degré $\leq n$ à une variable.

(1) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E.

(2) Considérons le sous-ensemble $Z \subset E$ formé par les polynômes qui prennent des valeurs entières en tous les nombres entiers. Le sous-ensemble Z est-il un sous-espace vectoriel de E ?

(3) Soit $f \in E$ un polynôme dont tous les coefficients sont entiers. Montrer que $f \in Z$.

(4) Est-il vrai que les coefficients de tout polynôme appartenant à Z sont nécessairement entiers ?

(5) Donner un exemple de polynôme $g \in E \setminus Z$ qui prend des valeurs entières en $n+1$ nombres entiers deux à deux distincts.

(6) Soit $h \in E$ un polynôme qui prend des valeurs entières en $n+1$ nombres entiers consécutifs k, $k+1$, …, $k+n$. Montrer que $h \in Z$.

Exercice 2

Partie I

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit a un nombre réel strictement positif. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable, solution de l'équation différentielle

$$f' = f^2 - a^2 .$$

(1) Montrer que si $f(t) = a$ ou $-a$ pour un certain $t \in I$, alors la fonction f est constante sur I.

(2) Montrer que si $f(0) > a$ (resp. $-a < f(0) < a$, $f(0) < -a$), alors $f(t) > a$ (resp. $-a < f(t) < a$, $f(t) < -a$) pour tout $t \in I$.

(3) Supposons que $f(0) \notin \{-a, a\}$. Calculer f en terme de $x_0 = f(0)$ en intégrant la fonction $\frac{f'}{f^2-a^2}$.
Indication: on pourra commencer par remarquer que

$$\frac{1}{f^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{f-a} - \frac{1}{f+a}\right) .$$

Partie II

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit a un nombre réel strictement positif. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant l'inégalité

$$g' > g^2 - a^2 .$$

Soit f l'unique solution de l'équation $f' = f^2 - a^2$ ayant pour condition initiale $f(0) = g(0)$ et dont l'intervalle de définition est maximal. On veut montrer que $g(t) > f(t)$ pour $t > 0$ et $g(t) < f(t)$ pour $t < 0$.

(4) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $t > 0$ tel que $f(t) \geq g(t)$. Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $f(t_1) = g(t_1)$ et $f(t) < g(t)$ pour tout $t \in (0, t_1)$.

(5) Montrer que $f'(t_1) \geq g'(t_1)$.

(6) Conclure que $g(t) > f(t)$ pour tout $t > 0$ et $g(t) < f(t)$ pour tout $t < 0$.

(7) Supposons que la fonction g soit définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$|g(t)| \leq a$$

pour tout t. (On pourra commencer par $g(0)$.)

Exercice 3

Étant donnés deux nombres entiers $n, m \geq 0$, on note $S(n,m)$ le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à m éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

(1) Calculer $S(n,n)$ et $S(n+1,n)$.

(2) Montrer que

$$S(n,m) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S(n-k, m-1).$$

(3) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} S(n,k) = m^n.$$

(4) Montrer que

$$S(n,m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$