Cet examen est composé de deux parties indépendantes. Merci de répondre aux questions de la partie I et de la partie II sur des feuilles séparées.

Partie I

Problème 1 : Flottabilité

Un bloc cylindrique de bois avec densité de masse ρ_w, rayon R, et hauteur h est partiellement immergé dans un liquide avec densité de masse ρ_l. Pour répondre aux questions qui suivent, considérez que la base du cylindre reste parallèle à la surface du liquide. Soit z la hauteur du cylindre qui n'est pas immergée.

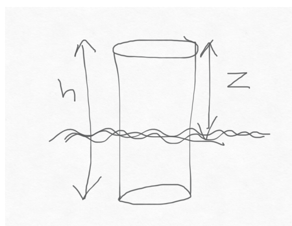


FIGURE 1 – Un cylindre partiellement immergé.

1. Quelle est la distance z_{eq} entre le haut du bloc et la surface du liquide quand le système se trouve en équilibre ?
2. Déterminez $z(t)$, en absence de viscosité du liquide, si le bloc est légèrement rehaussé, tel que $z(t=0) > z_{eq}$, puis est relaché.
3. Mainenant, supposons que le liquide est visqueux, et que la force visqueuse F_v est proportionnelle à la vitesse v, tel que $F_v = -bv$.
   (a) Écrivez l'équation de mouvement.
   (b) Écrivez la solution générale en distinguant entre trois régimes pour b. Quel genre de mouvement a lieu dans chaque régime ?
   (c) Déterminez la solution dans chaque régime de b en imposant la condition de borne appropriée.

Problème 2 : Un gaz idéal

Considerez un gaz idéal en trois dimensions composé de N particules de masse m à la température T, confiné dans une boîte cubique de longueur L. Supposez que la vitesse des particules suit une distribution maxwellienne.

1. Quelle est la distribution de vitesse normalisée $P(v_x, v_y, v_z)dv_xdv_ydv_z$ des particules du gaz ? Quelle est la distribution $P(v)dv$, où $v = |\vec{v}|$?

2. Quelle est la valeur la plus probable pour v (c'est-à -dire le maximum de $P(v)$) ?
3. Quelle est la moyenne de v ?
4. Quelle est la distribution de l'énergie cinétique ?
5. Quelle est l'énergie cinétique la plus probable ?
6. Quelle est l'énergie cinétique moyenne ? Répondez à cette question à la fois par un calcul et par une argumentation basée sur un principe physique.
7. Quelle est l'énergie totale de toutes les particules dans la boîte ?
8. Supposons que toutes les particules d'une énergie au-delà de l'énergie nk_BT soient instantanément enlevées de la boîte, n étant une constante réelle positive quelconque. Exprimez la réponse aux questions suivantes à l'aide de la fonction erreur $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$.
   (a) Combien de particules restent dans la boîte ?
   (b) Quelle est la nouvelle énergie totale du système ?
   (c) Après que les particules restantes dans la boîte sont de nouveau en équilibre, quelle est la nouvelle température du gaz ?
9. Considerez maintenant l'effet du champs gravitationnel de la terre sur le gaz, en supposant la statistique Maxwell-Boltzmann. Vous pouvez supposer que le champs graviationnel est uniforme le long de la hauteur L de la boîte. Quelle est l'énergie potentielle moyenne d'une particule ?

Probème 3 : Particule dans une boîte avec potentielle en fonction delta

Considérez une particule de masse m qui bouge dans un puits infini avec une potentielle en fonction delta à l'origine :

$$V(x) = \begin{cases} \Lambda\delta(x) & \text{for } |x| < a\,, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{0.1}$$

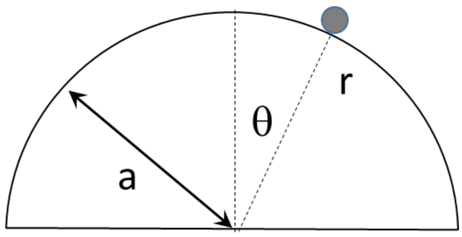
1. Écrivez l'équation de Schrödinger indépendante du temps qui décrit ce système.
2. En étudiant les solutions de cette équation, trouvez la valeur de Λ pour laquelle l'énergie de l'état fondamental du système est zéro.
3. Le théorème des noeuds prétend que pour un système uni-dimensionnel, le nombre des zéros de la n-ième fonction d'onde propre (pour le cas considéré ici on compte les zéros dans la région $|x| < a$) est égal à $n - 1$. En utilisant ce théorème, trouvez l'énergie du premier état excité du système.
4. Schématisez la fonction d'onde pour le deuxième état excité, en présentant votre raisonnement.

Partie II

Problème 1

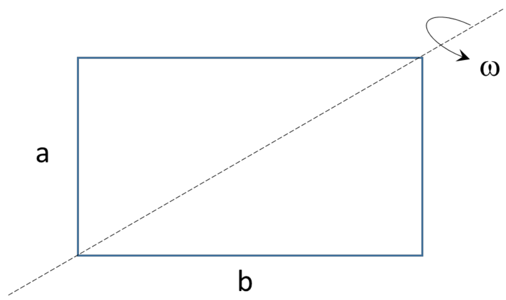
Une particule ponctuelle de masse m glisse du haut en bas d'un hémisphère de rayon a, sous l'effet de la gravité.

Trouver: a) la force normale exercée par l'hémisphère sur la particule; b) l'angle θ par rapport la verticale à partir duquel particule quittera l'hémisphère.



Problème 2

Un plan rectangulaire 2D uniforme de masse m et de dimensions a et b (on supposera b > a) tourne avec la vitesse angulaire constante ω autour d'une diagonale. Sans tenir compte de l'effet de gravité, trouvez: a) les axes principaux et les moments d'inertie; b) le vecteur moment angulaire dans le système de coordonnées du corps; c) le torque externe nécessaire pour maintenir une telle rotation.



Problème 3

Une particule ponctuelle classique (masse m) bouge dans l'espace à trois dimensions, sujette au potentiel $U(\mathbf{r}) = kr$, ou k est une constante, et $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ avec $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire qui pointe de l'origine vers la position $\mathbf{r}$.

1. Pour quelle énergie et quel vecteur d'onde, l'orbite sera-t-elle un cercle de rayon r autour de l'origine?

2. Quelle est la fréquence de ce mouvement circulaire?

3. Si la particule est légèrement perturbée de ce mouvement circulaire, quelle sera la fréquence de petites oscillations dans la direction radiale?

Problème 4

Nous nous plaçons dans l'espace à trois dimensions. Une particule quantique est sujette à un potentiel $U(r)$ qui ne dépend que de la distance de l'origine, i.e. $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ comme dans le problème précédent.

1. Ecrivez l'équation satisfaite par la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ de la particule.

2. Expliquez précisément pourquoi et comment il est possible de construire la solution générale de cette équation à partir de fonctions d'onde Ψ de la forme $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(r)\chi(\theta,\phi)$.

3. Nous rappelons l'expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{r^2\hbar^2}\hat{L}^2 \tag{1}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{2}$$

   Dérivez une équation différentielle pour $\psi(r)$.

4. Nous considérons le potentiel spécifique

$$U(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}. \tag{3}$$

   Ecrivez l'équation différentielle satisfaite par ψ.

5. Donnez des expressions explicites pour les niveaux d'énergie du problème en fonction de A et B. (Indication: pouvez-vous utiliser vos connaissances sur les énergies de l'atome d'hydrogème ?)