

SESSION 2026

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Paris-PSL – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Informations importantes

- * Les problèmes sont indépendants les uns des autres.
- * On peut utiliser les résultats de questions précédentes, en l'indiquant **au moment de les utiliser**.
- * Il est demandé de **soigneusement numéroter les questions**.
- * Il est demandé de **mettre les réponses en évidence**, en les **surlignant**, en les **encadrant**, ou, a minima, en les **soulignant**. L'utilisation de crayon de papier n'est pas recommandée.
- * Il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction.

PROBLÈME A.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles $k \times k$, ainsi que I_k la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I. On considère l'application

$$\mathbf{a} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{2}(-y + z), \frac{1}{2}(y - z), \frac{1}{2}(\sqrt{2}x + y + z) \right).$$

Afin de simplifier la lecture et d'éviter les erreurs de calcul, nous conseillons de noter dans tout le problème les matrices sous forme d'un nombre rationnel multiplié par une matrice à coefficients majoritairement entiers, comme par exemple :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{plutôt que} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

- (1) (1a) Montrer que \mathbf{a} est une application linéaire et exprimer la matrice A représentant \mathbf{a} dans la base canonique.
(1b) Calculer le noyau $\ker(A)$ de l'application linéaire \mathbf{a} .
(1c) Calculer la trace $\text{Tr}(A)$ de la matrice A .
(1d) Donner une valeur propre de \mathbf{a} et un vecteur propre associé.
- (2) (2a) Calculer la matrice $P = A^T A$.
(2b) Calculer la matrice $Q = A A^T$.
(2c) Calculer les traces $\text{Tr}(P)$ et $\text{Tr}(Q)$ des matrices P et Q .
- (3) (3a) Montrer que Q est un projecteur.
(3b) Calculer le noyau $\ker(P)$ de l'application linéaire représentée par P .

On fixe dorénavant un entier $k \geq 1$, et on travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On considère une matrice

$$B \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R}), \quad \text{et on définit} \quad R = B^T B \quad \text{et} \quad S = B B^T.$$

Enfin, on suppose que R est un projecteur et que S est diagonalisable.

- (4) (4a) Exprimer S^3 en fonction de S^2 .

(4b) Montrer que S est un projecteur.

(5) (5a) Montrer que $\ker(R) = \ker(B)$.

(5b) Montrer que les deux matrices B et R ont le même rang.

(5c) Montrer que les deux matrices B et S ont le même rang.

Partie II. On considère deux projecteurs U et W de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ ayant le même rang r , et tels que

$$U^T = U \quad \text{et} \quad W^T = W.$$

On considère ensuite une famille orthonormée $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ de l'image $\text{Im}(U)$ de l'application linéaire représentée par U . De façon similaire, on considère également une famille orthonormée $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r)$ de l'image $\text{Im}(W)$ de l'application linéaire représentée par W .

(6) Montrer qu'il existe des vecteurs $\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_k$ tels que la famille $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ forme une base orthonormée de \mathbf{R}^k .

On choisit de même des vecteurs $\mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_k$ tels que la famille $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ forme une base orthonormée de \mathbf{R}^k . Pour tous vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbf{R}^k , on note $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ le produit scalaire usuel entre \mathbf{x} et \mathbf{y} .

(7) Soient f et g deux endomorphismes de \mathbf{R}^k . Montrer que si $\langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j \rangle = \langle g(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq k$, alors $f = g$.

On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de \mathbf{R}^k et on définit l'endomorphisme $c: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ par

$$c(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & \text{pour } 1 \leq i \leq r \\ \mathbf{0} & \text{pour } r+1 \leq i \leq k \end{cases}.$$

On note $C \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ la matrice représentant c dans la base canonique, ainsi que \mathbf{u} l'endomorphisme représenté par U .

(8) (8a) Pour tout $1 \leq i, j \leq k$, calculer $\langle c(\mathbf{e}_i), c(\mathbf{e}_j) \rangle$.

(8b) Montrer que $\text{Im}(U) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$.

(8c) Pour tout $1 \leq i, j \leq k$, calculer $\langle \mathbf{u}(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_j \rangle$.

(8d) En déduire une expression de U en fonction de C .

PROBLÈME B.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie I. On fixe un entier $n \geq 2$ et on tire n fois de suite, de façon indépendante, une pièce qui tombe sur le côté «pile» avec probabilité $\frac{1}{n}$. Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la pièce tombe sur «pile» lors du k -ème lancé et 0 sinon.

(9) (9a) Donner la loi de X_1 , son espérance $E[X_1]$ et sa variance $V[X_1]$.

(9b) Calculer la probabilité $P(X_1 = X_2)$.

(9c) Calculer l'espérance $E[2^{X_1}]$.

(9d) Calculer l'espérance $E[2^{X_1 - X_2}]$.

On pose $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

(10)(10a) Donner la loi de S , son espérance $E[S]$ et sa variance $V[S]$.

(10b) Donner le moment d'ordre 2 de S .

(11)(11a) Calculer la probabilité $P(S = 2)$.

(11b) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_1 = 1 \mid S = 2)$.

(12)(12a) Calculer l'espérance $E[S X_1]$.

(12b) Calculer le coefficient de corrélation entre X_1 et S . Commenter le résultat.

Pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$.

(13)(13a) Calculer $f_n(1)$ et $f_n(-1)$.

(13b) Calculer la limite de $f_n(-1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

(13c) À l'aide de $f_n(1)$ et $f_n(-1)$, exprimer la probabilité p_n que S soit un nombre pair.

(13d) En déduire la limite de p_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

Partie II. Soit Z une variable aléatoire réelle continue dont la fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

(14)(14a) Vérifier que F_Z est bien une fonction de répartition.

(14b) On note f_Z la densité de Z . Déterminer $f_Z(x)$ pour $x \neq 1$.

(14c) On convient que $f_Z(1) = 1$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Soient Z_1, Z_2, \dots, Z_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Z . On définit la variable aléatoire M_n par

$$M_n = \frac{1}{n} \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

(15) Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z_1 < 2 \mid M_2 < 2)$.

(16)(16a) Déterminer la fonction de répartition de M_n , notée F_{M_n} .

(16b) Pour quelles valeurs de $n \geq 2$, la variable M_n admet-elle une espérance ?

(16c) Déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la limite $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M_n}(x)$.

(16d) La fonction F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

PROBLÈME C.

On considère la fonction

$$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto e^{-t^2}.$$

(17)(17a) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

- (17b) Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.
- (17c) Dresser le tableau de variation de h .
- (17d) Trouver les points d'inflexion de h .
- (17e) Tracer le graphe de h , en faisant apparaître la tangente en $t = 0$.

On considère dorénavant la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

- (18)(18a) Déterminer le domaine de définition de f , que l'on notera \mathcal{D}_f , c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbf{R}$ tels que $f(x)$ est définie.
- (18b) Montrer que f est paire.
- (19)(19a) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a l'encadrement $e^{-4x^2} \leq f(x) \leq e^{-x^2}$.
- (19b) Déterminer la limite de f à droite en 0.
- (19c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- (19d) L'intégrale généralisée $\int_0^\infty f(x)dx$ est-elle finie (convergente)? Si oui, en donner un encadrement.

On note H une primitive de h .

- (20)(20a) Montrer que f est dérivable sur \mathcal{D}_f , et calculer $xf'(x) + f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
- (20b) Dresser le tableau de variation de f .
- (21)(21a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.
- (21b) Soit $\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Montrer que

$$\frac{1}{x^3} \int_x^{2x} t^2 \varepsilon(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

- (21c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f .
- (21d) Donner l'allure locale du graphe de f au voisinage de 0 :
En 0, existe-t-il une tangente? Le cas échéant, quelle est la position du graphe par rapport à celle-ci? En 0, existe-t-il un point d'inflexion? Une ébauche de graphe est souhaitée.

- (22)(22a) On fixe $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\alpha_x > 0$ tel que

$$f(x) = e^{-(\alpha_x x)^2}.$$

- (22b) Montrer que $\alpha_x \in]1, 2[$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère maintenant la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} t^n e^{-t^2} dt$$

et on admet que son domaine de définition est encore \mathcal{D}_f .

- (23)(23a) Étudier la parité de f_n .
- (23b) Pour $x \in \mathcal{D}_f$, calculer $f_1(x)$.
- (23c) Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $n \geq 2$, trouver une relation de récurrence entre $f_n(x)$ et $f_{n-2}(x)$.

