EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
GEOSCIENCIES

Les tornades et un bassin d'eau

Dans cet exercice on va calculer quelques caractéristiques dynamiques d'un fluide dans un bassin. Ceci donnera une approximation – bien que faible – de quelques phénomènes de la dynamiques toubillonaire de l'atmosphère ou de l'océan, par example les tornades.

Le bassin est parfaitement circulaire, sa géometrie sur le plan radial se trouve en Fig.1. L'eau à l'intérieur de la tasse a été melangée comme dans une tasse de thé ; elle tourne rigidement avec une vitesse angulaire Ω s^{-1}. Nous appellerons $\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z]$ le vecteur vitesse et ses composantes radiale, tangentielle et verticale.

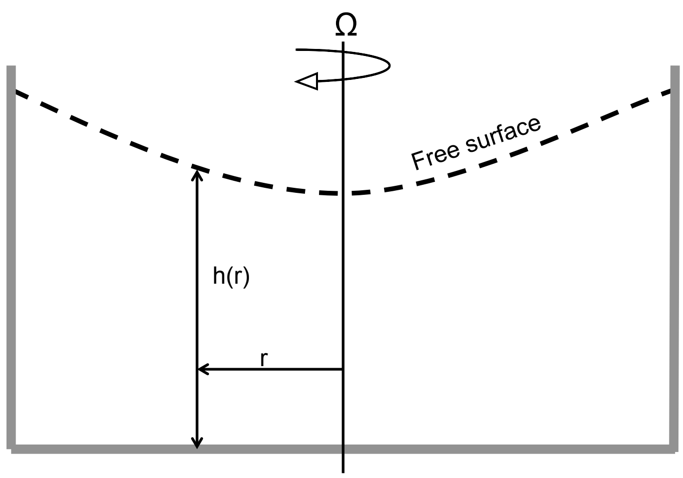

FIGURE 1 – Géometrie du basin

On considerera l'eau incompressible et hydrostatique (la pression à un endroit ne dépend que du poids de la colonne de liquide au dessus). Cette derneière approximation peut s'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{1}$$

où p est la pression, ρ la densité, et g l'accelerationis de gravité. z est la coordonnée verticale, définie à zéro au fond du bassin.

On negligera également la tension de surface et toute friction, sauf celle avec les parois du bassin, qui, lui, ne tourne pas. Dans ces hypothèses on peut ecrire l'équation suivante pour le bilan radial des forces, partout dans le liquide :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - k_r u_r + \Omega^2 r, \tag{2}$$

oú p est la pression et k_r est un coefficient de friction, qui sera negligeable partout sauf en proximité des parois et du fond du bassin.

1) Ecrire, à partir de l'eq.1, une expression pour la pression au fond du bassin, en fonction de la hauteur de liquide $h(r)$. On appellera p_{atm} la pression atmosphérique.

2) Aux endroits loin des parois du bassin, la force de gradient de pression et la force centrifuge sont à l'équilibre. Dans cette hypothèse, deduisez de (2) une équation pour la forme de la surface libre de l'eau en fonction de r.

3) L'équation calculée au point précédent n'est valable que vers le centre du bassin, où la friction des parois est negligeable. Qualitativement, comment la parois verticale va-t-elle influencer la forme de la surface libre ? Faites un dessin schématique.

4) Au fond du bassin, la friction n'est pas negligeable. Au contraire, on peut penser que la couche d'eau en contact avec le fond a une vitesse tangentielle negligeable.

4.1) Ce fait va créer une vitesse radiale non nulle près du fond. Pourquoi ?

4.2) Toujours à partir de (2), calculez une expression pour la vitesse radiale en fonction du rayon r, en faisant un bilan de la force de gradient de pression et de la force de friction.

5) Par conservation de la masse, la vitesse radiale au fond engendre une vitesse verticale le long de l'axe du bassin. Ceci induit une circulation secondaire dans le plan radial du bassin. Représentez schématiquement cette circulation.

La circulaiton secondaire est responsable de la dissipation de la rotation en soustraiant de l'energie au vortex. Ceci est beaucoup plus efficace que la simple friction.

6) Parce que le fluide est incompressible, le vecteur vitesse est non-divergent. Dans notre cas, cela peut etre écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Calculez la derivée verticale de vitesse verticale dans l'axe du bassin. Cette estimation sera valide près du fond de la tasse.

7) Dans la Figure 2, les points rouges representent des mesures de vitesse tangentielle du vent dans une tornade, en fonction de la distance r de l' axe de rotation. On Ignorera la ligne noire, issue d'une simulation numerique de la même tornade.

7.1) A partir de la figure, estimer approximativement la vitesse de rotation Ω à proximitè du centre de la tornade.

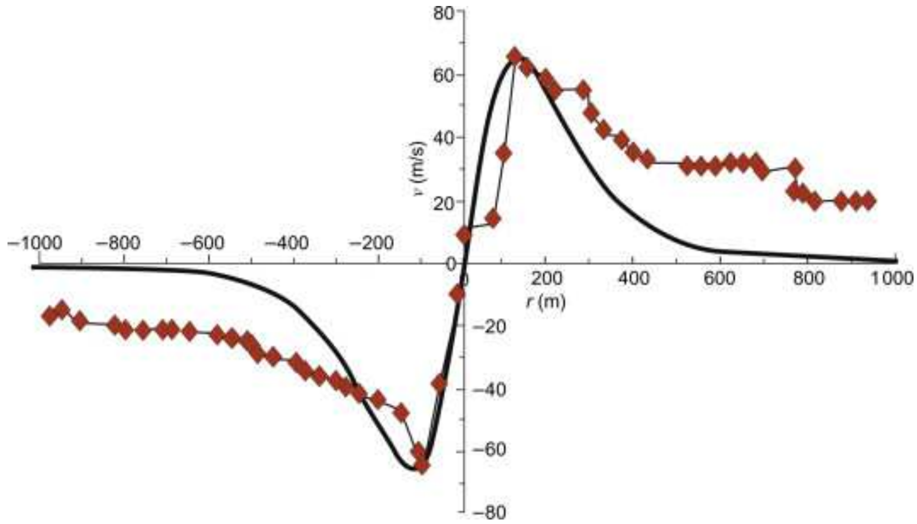

FIGURE 2 – point rouges : mesures de vitesse tangentielle du vent dans une tornade, près de la surface, en fonction de la distance de l 'axe de rotation

7.2) Calculer la vitesse vertical du vent à 2 m de hauteur du sol, au centre de la tornade. on prendra une valeur de $k_r = 10^{-2}\ s^{-1}$ pour le coefficient de friction.

Sur un terrain plat, la friction au sol est basse et le danger que la tornade souleve des debris est plus élevée.

FIGURE CREDIT : SERGEY A. ARSENYEV : MATHEMATICAL MODELING OF TORNADOES AND SQUALL STORMS. GEOSCIENCE FRONTIERS VOLUME 2, ISSUE 2, APRIL 2011, PAGES 215221