Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de fonction de répartition F donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R}\,,\ F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

(1) Quelle est la loi de $\frac{1}{X_1^2}$?

(2) Que vaut l'espérance de X_1 ?

(3) Et celle de X_1^2 ?

(4) On note $M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. Déterminer un nombre a_n tel que $\frac{M_n}{a_n}$ suive la même loi que X_1.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $c > 0$. On considère une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels telle que

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \qquad 0 < a_n \leqslant c(a_{2n} + a_{2n+1}) \tag{$\star$}$$

Pour tout $k \geqslant 0$, on pose

$$S_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n.$$

(1) Démontrer que $S_k \leqslant c S_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

(2) On suppose dans cette question que $c \leqslant 1$. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ diverge.

(3) On suppose dans cette question que $c > 1$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels vérifiant ($\star$) et telle que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ diverge.

(4) On suppose dans cette question que $c > 1$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels vérifiant ($\star$) et telle que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\,,\ a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}\,.$$

(1) Dans cette question (et cette question seulement), on suppose que $n = 2$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

(2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Montrer que

$$X^T A X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}\,, \quad \text{puis que} \quad X^T A X = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 \mathrm{d}t\,.$$

(3) *(3a)* Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Montrer que si $X^T A X = 0$ alors $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$.

(3b) En déduire que A est inversible.

(4) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (noté P) étant $p \in]0,1[$ et la probabilité d'obtenir face (noté F) étant $q = 1-p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Π_k l'événement «le k-ième lancer donne pile» et F_k l'événement contraire.

(1) Calculer la probabilité de l'événement A «la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP ».

(2) Pour tout $n \geqslant 2$, calculer la probabilité de l'événement B_n «la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n et il n'y a pas eu avant de séquence FP ». En déduire la probabilité de l'événement B «la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP ».

(3) Déterminer de même la probabilité des événements :

(a) C «la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF » ;

(b) D «la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF ».

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Pour simplifier les notations on note d_H la dimension d'un sous-espace vectoriel H de E.

(1) En considérant l'application

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} F \times G & \to & F + G \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

montrer que $d_{F+G} + d_{F\cap G} = d_F + d_G$.

(2) Montrer que

$$d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 - d_F^2 - d_G^2 = 2\left(d_G - d_{F\cap G}\right)\left(d_F - d_{F\cap G}\right).$$

(3) Montrer que $d_{F+G}^2 + d_{F\cap G}^2 \geqslant d_F^2 + d_G^2$ et étudier le cas d'égalité.

(4) Soit $\alpha > 1$. Montrer que $d_{F+G}^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha \geqslant d_F^\alpha + d_G^\alpha$ et étudier le cas d'égalité.
Indication. On pourra considérer la fonction $f(x) = (x + d_G - d_{F\cap G})^\alpha + d_{F\cap G}^\alpha - x^\alpha - d_G^\alpha$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ et $T \geqslant 1$ deux entiers. On considère n urnes initialement vides. À chaque temps $t = 1, \ldots, T$, on lance une boule et l'on note X_t le numéro de l'urne dans laquelle tombe la boule. On suppose que les variables $X_1, \ldots, X_T$ sont indépendantes et uniformément distribuées sur $\{1, \ldots, n\}$. On s'intéresse à la variable M_T correspondant au nombre d'urnes vides après T lancers, soit

$$M_T = \sum_{i=1}^n Y_i\,,$$

où Y_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est vide, 0 sinon.

(1) Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, quelle est la probabilité que l'urne i soit vide après T lancers ?

(2) Que vaut l'espérance de M_T ?

(3) Montrer que si l'on effectue $T(n)$ lancers avec $\frac{T(n)}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, alors

$$\mathrm{P}(M_{T(n)} > 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

(4) *(4a)* Montrer que

$$\mathrm{V}(M_T) = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\,.$$

(4b) Montrer que, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, les variables Y_i et Y_j sont négativement corrélées.

(4c) En déduire que $\mathrm{V}(M_T) \leqslant \mathrm{E}[M_T]$, puis que, si l'on effectue $T(n)$ lancers avec $\frac{T(n)}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors

$$\mathrm{P}(M_{T(n)} > 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $x^n = 2x + 1$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n.

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$.

(3) Montrer que $\ell = 1$.

(4) On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

(4a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(3 + 2\varepsilon_n)$.

(4b) En déduire que $n\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(3)$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $M > 0$ un nombre réel et soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On considère des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ à valeurs dans $[-M, M]$ indépendantes et de même loi. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on pose

$$Y_k = X_1 \cdots X_k.$$

(1) On suppose dans cette question que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1, +1\}$. On note $p = \mathrm{P}(X_1 = 1)$.

(a) On suppose que $p = 1/2$. Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.

(b) On suppose que $p \notin \{0, 1/2, 1\}$. Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ ne sont pas indépendantes.

(2) On suppose dans cette question que les variables aléatoires $Y_1, \cdots, Y_n$ sont indépendantes.

(a) Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a $\mathrm{E}\left[X_1^k\right]^2 \mathrm{E}\left[X_2^k\right] = \mathrm{E}\left[X_1^{2k}\right] \mathrm{E}\left[X_2^k\right]$.

(b) Démontrer que soit X_1 est une variable aléatoire constante, soit il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{P}(X_1 = -c) = \mathrm{P}(X_1 = c) = 1/2$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit p l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que p est une projection.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.

(3) Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan $\mathscr{P}$ que l'on caractérisera par une équation.

(4) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$.

- *(4a)* Calculer la distance de u au plan $\mathscr{P}$.
- *(4b)* En déduire l'inégalité

$$\frac{|-x+y-z|}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ on a

$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Indication. On pourra utiliser la formule $e^{\mathrm{i}u} = \cos(u) + \mathrm{i}\sin(u)$ pour tout $u \in \mathbf{R}$.

(2) Démontrer que pour tout $a \in \mathbf{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente, puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbf{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2}\mathrm{d}t = c|a|.$$

(3) Soit Z une variable aléatoire réelle à support fini. Montrer que

$$c\mathrm{E}(|Z|) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\mathrm{E}(\cos(Zt))}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(4) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à support fini, indépendantes et de même loi. Montrer que

$$\mathrm{E}\left[|X-Y|\right] \leqslant \mathrm{E}\left[|X+Y|\right].$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que $M \cdot {}^tM \cdot M = I_n$.

(1) Montrer que M est inversible.

(2) Montrer que M est symétrique.

(3) Trouver M.

Remarque. On admettra que toute matrice symétrique est diagonalisable.

(4) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que ${}^tA \cdot A^2 = I_n$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$ entier. Sur chaque carte d'un paquet de n cartes, figure un nombre, de sorte que les n nombres écrits sont distincts deux à deux. On mélange ce paquet, et on le donne à une joueuse prénommée Antiope, qui ignore la valeur de ces nombres. Elle devra alors regarder les cartes une à une, en s'arrêtant quand elle veut. Elle gagne si elle s'arrête à la carte sur laquelle figure le maximum M des nombres écrits sur les cartes.

Antiope décide de la stratégie suivante, s'étant donné un entier p, avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$: elle regarde les p premières cartes, puis à partir de là, elle s'arrête dès qu'elle voit une carte portant un nombre supérieur aux nombres déjà observés. Bien sûr, si M est dans les p premières cartes, Antiope ne s'arrête qu'à la dernière carte et a perdu. Elle perd aussi lorsque M n'est pas dans les p premières cartes et qu'apparaît ensuite une carte qui majore toutes les cartes observées mais qui n'est pas M.

(1) Pour chaque $k \in \{p, \dots, n-1\}$, on note $E_{n,p,k}$ l'événement « Antiope gagne en s'arrêtant à la $(k+1)^{\text{ème}}$ carte ».

(1a) Quelle est la probabilité de l'événement $E_{n,p,p}$?

(1b) Plus généralement, quelle est la probabilité de l'événement $E_{n,p,k}$, pour $k \in \{p, \dots, n-1\}$?

(1c) Montrer finalement que la probabilité de l'événement $G_{n,p}$:« Antiope gagne » est

$$\mathrm{P}(G_{n,p}) = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{p}{kn} \cdot$$

(2) *(2a)* Justifier que

$$\ln\left(\frac{n}{p}\right) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{1}{p},$$

et en déduire un encadrement de la probabilité de $G_{n,p}$ (sans signe somme).

(2b) L'entier n étant supposé « grand », Antiope doit maintenant choisir la valeur de p qui optimisera sa stratégie. Elle doit faire en sorte que $\frac{n}{p}$ soit le plus proche d'un certain réel. Lequel ? Que vaut alors (à peu près) la probabilité qu'elle gagne ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient $x, y \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ des vecteurs non nuls. On note $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ leurs matrices colonne associées et on considère la matrice $K \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $K = X^tY$, où ${}^tM$ désigne la transposée d'une matrice M.

(1) Montrer que $\mathrm{Tr}(K) = \langle x, y \rangle$, où Tr désigne la trace d'une matrice et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$.

(2) Montrer que $K^2 = \mathrm{Tr}(K)K$.

(3) On suppose que $\mathrm{Tr}(K) = 0$. Montrer que K n'est pas diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$.

(a) Montrer que $\mathbf{R}^n = \ker K \oplus \ker(K - \mathrm{Tr}(K)I_n)$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathbf{R}^n$.

(b) Montrer que K est diagonalisable.

(5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes non nuls $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que $M = U^tV$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Une athlète tente des sauts de longueurs successives $1, 2, 3 \ldots$. On suppose que les sauts sont indépendants et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la probabilité de réussir un saut de longueur n est égale à $\frac{1}{n}$. Lorsqu'elle rencontre un échec pour une longueur donnée, l'athlète retente cette même longueur, et, une fois qu'elle y arrive, elle passe à la longueur suivante.

(1) On note X la variable aléatoire correspondant à la longueur pour laquelle l'athlète rencontre son premier échec.

(1a) Calculer $\mathrm{P}(X > n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(1b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

(2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note T_n le nombre total de sauts effectués jusqu'à atteindre la longueur n pour la première fois, et l'on pose $T_0 = 0$.

(2a) Pour $n \geqslant 1$, quelle est la loi de $T_n - T_{n-1}$?

(2b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{E}[T_n] = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(T_n) \leqslant n^3 \,.$$

(2c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{T_n}{\mathrm{E}[T_n]} - 1 \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2(n+1)} \,.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)|^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

(1) Justifier l'existence d'un réel M et d'un élément $x_0 \in [a,b]$ tels que

$$|f(x_0)| = M = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

(2) Montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)|^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M\,.$$

(3) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un intervalle $[x_1, x_2] \subset [a,b]$ avec $x_1 < x_2$ tel que pour tout $t \in [x_1, x_2]$, on a $|f(t)| \geqslant M - \varepsilon$, et en déduire une minoration de $\left(\int_a^b |f(t)|^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

(4) Conclure.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient $k, n \geqslant 2$ deux nombres entiers. Soit $p \in]0,1[$. Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile dans un lancer est p. Chaque joueur lance la pièce au plus n fois (les lancers sont indépendants) en s'arrêtant s'il obtient pile et son score est défini comme suit :

— s'il obtient pile au premier lancer, son score est 0,

— s'il obtient pile au deuxième lancer (après un face), son score est 1,

— ...

— s'il obtient pile au $n^{\text{ème}}$ lancer (après $n-1$ fois face), son score est $n-1$,

— s'il n'obtient pas pile au cours des n lancers, son score est n.

Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le score d'un joueur donné.

(2) Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis calculer sa limite quand n tend vers l'infini.

(3) Démontrer que

$$\sum_{\ell=1}^{k} \ell \binom{k}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{k-\ell} = pk.$$

(4) Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis sa limite quand n tend vers l'infini.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, et pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $s(A,i)$ la somme des coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A, c'est-à-dire $s(A,i) = a_{i,1} + \cdots + a_{i,n}$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

(i) pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,j} \geqslant 0$;

(ii) pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $s(A,i) < 1$.

(1) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{E}$, alors AB appartient à $\mathcal{E}$.

(2) Soit $A \in \mathcal{E}$. On pose $\mu = \max\{s(A,1),\dots,s(A,n)\}$. Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$s(A^{p+1},i) \leqslant \mu s(A^p,i)\,,$$

et en déduire $s(A^p,i)$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$, puis que A^p tend vers la matrice nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire que tous les coefficients de A^p tendent vers 0).

(3) Soient A une matrice de $\mathcal{E}$ et $C \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ une matrice colonne. On considère la suite $(X_p)_{p\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ définie par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et pour tout } p \in \mathbf{N},\ X_{p+1} = AX_p + C\,.$$

(3a) Soit $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX = X$. Calculer A^pX pour tout $p \in \mathbf{N}$ et en déduire que X est la matrice nulle de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

(3b) Montrer qu'il existe un unique élément $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX + C = X$.

(3c) Soit X l'élément de la question précédente. Montrer que X_p tend vers X quand $p \to +\infty$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$ on pose

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un unique $x \geqslant 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.

(2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(3) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

(4) Démontrer que $n^\alpha\,(u_n - n^\alpha - \pi/2) \to -1$ lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $e^{-x} = x^n$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.

(3) Montrer que $\ell = 1$.

(4) Montrer que $n(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. On note $\mathrm{E}(X)$ son espérance et $\mathrm{V}(X)$ sa variance.

(1) Montrer que pour tous $\lambda > 0$ et $t \geqslant 0$ on a

$$\mathrm{P}(X \geqslant \mathrm{E}(X)+\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}(X)+t)^2\big)}{(t+\lambda)^2}.$$

(2) Montrer que

$$\mathrm{P}(X \geqslant \mathrm{E}(X)+\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)+\lambda^2}.$$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes un moment d'ordre 2 (on ne les suppose pas forcément de même loi). On suppose que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\mathrm{E}(X_n) = 0$ et $\mathrm{V}(X_n) \leqslant 1$. On pose

$$N = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1 : X_n \leqslant 1\} & \text{si } \{n \geqslant 1 : X_n \leqslant 1\} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\mathbf{P}(N > n) \leqslant 2^{-n}$.

(b) Montrer que $\mathrm{P}(N = \infty) = 0$.

(c) Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2).$$

Le but de cet exercice est de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée. On pose $z_n = \frac{u_n}{n!}$ pour $n \geqslant 0$.

(1) (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$z_n = -2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + u_0 + 1 - \frac{1}{n!}.$$

(b) En déduire que si $u_0 \neq 2e - 1$ alors (u_n) n'est pas bornée.

(2) On suppose dans cette question que $u_0 = 2e - 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $S_n + \frac{1}{n!} \leqslant e \leqslant S_n + \frac{1}{n!}\frac{n}{n-1}$.

(b) En déduire que (u_n) est bornée.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, strictement positives et toutes d'espérance 1 (on ne les suppose pas forcément de même loi). Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad u_n = \mathrm{E}(\sqrt{Z_n}).$$

(1) On suppose que $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathrm{P}(Z_n > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles strictement positives admettant un moment d'ordre 2. Soit $\lambda \in]0,1[$.

(a) Montrer que $\mathrm{E}\left[XY\right]^2 \leqslant \mathrm{E}\left[X^2\right]\mathrm{E}\left[Y^2\right]$.

Indication. On pourra justifier que $f(t) = \mathrm{E}\left[(X+tY)^2\right]$ est un polynôme de degré 2 et calculer son discrimant.

(b) Montrer que $\mathrm{E}(X\mathbb{1}_{X\geqslant \lambda E(X)})^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\mathrm{P}(X \geqslant \lambda\mathrm{E}(X))$.

(c) Montrer que

$$\mathrm{P}(X \geqslant \lambda\mathrm{E}(X)) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}.$$

(3) On suppose dans cette question que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathrm{P}(Z_n > \varepsilon) \to 0$.

(a) Montrer que

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{Z_n} \geqslant \frac{1}{2}u_n\right) \geqslant \frac{u_n^2}{4}.$$

(b) Montrer que $u_n \to 0$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée.

(1) Calculer $\mathrm{E}[\|X\|^2]$.

(2) *(2a)* En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{E}[X_1^4] = 3$.

(2b) En déduire la valeur de $\mathrm{V}(\|X\|^2)$.

(3) Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathrm{P}\left(\left|\|X\|^2 - n\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{2n}{t^2}\cdot$$

(4) En déduire que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathrm{P}\left(\left|\|X\| - \sqrt{n}\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{2}{t^2}\cdot$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs tels que $p_n/n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n} = 0. \tag{$\star$}$$

(1) Pour tout réel $M > 1$, justifier l'existence d'un entier k_M tel que $p_n \geqslant Mn$ pour $n \geqslant k_M$.

(2) Justifier que la série de terme général x^{p_n} converge pour tout $x \in [0,1[$.

On pose pour tout $m \geqslant 1$ et $x \in [0,1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p_n}, \qquad f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} x^{p_n}.$$

(3) Démontrer que pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$f(x) \leqslant f_{k_M}(1) + \frac{1}{1-x^M}.$$

(4) Démontrer $(\star)$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

(1) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

(1a) On tire k boules d'un coup dans l'urne, et l'on note $I_1 < \cdots < I_k$ les numéros obtenus classés par ordre croissant. Déterminer, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la probabilité que I_j soit égal à i.

(1b) En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on a l'identité :

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i}{k-j} = \binom{n}{k}.$$

(2) On reprend notre urne avec sa composition initiale (n boules numérotées). On enlève au hasard une boule de l'urne, et l'on note I le numéro de cette boule. Puis, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on tire k boules d'un coup, et l'on note Y le nombre de boules, parmi ces k boules, qui ont un numéro strictement plus petit que I.

(2a) Quelle est la loi de Y ?

(2b) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la probabilité que $I = i$ sachant que $Y = k$. Pour quelles valeurs de i cette probabilité est-elle maximale ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que pour tout $x \geqslant 0$ on ait

$$\frac{f(x)^2 f'(x)^2}{1+x} + f''(x) = -1.$$

On raisonne par l'absurde et on considère une telle fonction f.

(1) Montrer que $f'(x) \leqslant f'(0) - x$ pour tout $x \geqslant 0$.

(2) Montrer qu'il existe $a \geqslant 1$ tel que $f(x) < -x$ pour tout $x > a$.

(3) Aboutir à une contradiction.