

# **ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

## **CONCOURS D'ADMISSION 2025**

**JEUDI 17 AVRIL 2025**  
**08h00 - 14h00**

**FILIERE PC - Epreuve n° 7**

**PHYSIQUE C (U)**

*Durée : 6 heures*

*L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve*

# Autour de l'énergie électromagnétique

★ ★ ★

Cette épreuve propose d'étudier l'énergie électromagnétique de distributions de charges et de courants. On essaiera notamment de déterminer l'énergie de telles distributions à partir des travaux nécessaires pour les mettre en place, et de relier les différentes formulations possibles de ces énergies. On s'interrogera également sur la signification physique de l'énergie propre de telles distributions, en lien avec les différents modèles microscopiques utilisés pour décrire ces distributions.

Le sujet est divisé en deux parties largement indépendantes l'une de l'autre, la première traitant de l'énergie de distributions de charges en électrostatique et la deuxième traitant de l'énergie de distributions de courants dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Ces deux parties ont cependant été pensées pour être effectuées dans l'ordre, et les candidats sont encouragés à procéder ainsi.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré. Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

**La plus grande importance doit être accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation. Certaines questions, marquées par une étoile (\*), requièrent une réflexion plus poussée de la part des candidats, sans être nécessairement plus calculatoires. Elles seront valorisées en conséquence, même si le raisonnement est inachevé. Les réponses doivent être clairement argumentées, en s'appuyant si nécessaire sur des schémas, tout en restant aussi concises que possible.**

★ ★ ★

Ce sujet comporte 15 pages, numérotées de 1 à 15.

★ ★ ★

# Formulaire

## Analyse vectorielle et intégrales utiles

- On désigne par :
  - ★  $\vec{\text{grad}} \phi$  le gradient d'un champ scalaire  $\phi$ ,
  - ★  $\text{div } \vec{X}$  la divergence d'un champ vecteur  $\vec{X}$ ,
  - ★  $\vec{\text{rot}} \vec{X}$  le rotationnel d'un champ vecteur  $\vec{X}$ .
- Pour  $\phi$  et  $\vec{X}$  des champs scalaire et vecteur quelconques :
  - ★  $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{grad}} \phi) = \vec{0}$ ,
  - ★  $\text{div} (\vec{\text{rot}} \vec{X}) = 0$ .
- Notant  $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ , le gradient de  $1/r_{AB}$  vaut :
 
$$\vec{\text{grad}}_B \left( \frac{1}{r_{AB}} \right) = -\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \quad \text{en faisant varier } \vec{r}_B, \text{ donnant : } d\left(\frac{1}{r_{AB}}\right) = \vec{\text{grad}}_B \left( \frac{1}{r_{AB}} \right) \cdot d\vec{r}_B, \quad (1)$$

$$\vec{\text{grad}}_A \left( \frac{1}{r_{AB}} \right) = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}^3} \quad \text{en faisant varier } \vec{r}_A, \text{ donnant : } d\left(\frac{1}{r_{AB}}\right) = \vec{\text{grad}}_A \left( \frac{1}{r_{AB}} \right) \cdot d\vec{r}_A. \quad (2)$$

- Pour  $\phi, \vec{X}$  et  $\vec{Y}$  des champs scalaire et vecteurs quelconques :

$$\text{div} (\phi \vec{X}) = \phi (\text{div } \vec{X}) + (\vec{\text{grad}} \phi) \cdot \vec{X}. \quad (3)$$

$$\text{div} (\vec{X} \wedge \vec{Y}) = \vec{Y} \cdot (\vec{\text{rot}} \vec{X}) - \vec{X} \cdot (\vec{\text{rot}} \vec{Y}). \quad (4)$$

- Le produit mixte de trois vecteurs  $\vec{X}, \vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  possède les propriétés suivantes :

$$(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = (\vec{Z} \wedge \vec{X}) \cdot \vec{Y} = -(\vec{X} \wedge \vec{Z}) \cdot \vec{Y} \quad (5)$$

- Dans tout le sujet, on note  $d\tau_{\vec{r}}$  les éléments de volume dans les intégrales, où l'indice  $\vec{r}$  repère des éléments de volume  $d\tau$  sur lesquels l'intégration est effectuée. On repère similairement  $d\vec{S}_{\vec{r}}$  et  $d\vec{l}_{\vec{r}}$  les éléments de surface et de longueur, respectivement.
- On rappelle les formulations des intégrales sur tout l'espace en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , cylindriques  $(r, \theta, z)$ , et sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\begin{aligned} \iiint F(\vec{r}) d\tau_{\vec{r}} &= \iiint_{x,y,z=-\infty}^{x,y,z=+\infty} F(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\infty}^{+\infty} F(r, \theta, z) r dr d\theta dz \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} F(r, \theta, \phi) r \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

- On a :

$$\iiint \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} + \vec{n})}{r^3 |\vec{r} + \vec{n}|^3} d\tau_{\vec{r}} = 4\pi, \quad (6)$$

où l'intégrale est effectuée sur tout l'espace et  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire quelconque, et

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}. \quad (7)$$

## Symétries et propriétés à grande distance des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

On rappelle quelques propriétés des champs électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  et magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  créés par des distributions de charges  $\rho(\vec{r})$  et de courants  $\vec{j}(\vec{r})$ . On note également  $V(\vec{r})$  le potentiel électrique.

- Symétries des champs par rapport aux charges et courants :
  - ★ les plans de symétrie de  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont de symétrie pour  $\vec{E}$  et d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ ,
  - ★ les plans d'antisymétrie de  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont d'antisymétrie pour  $\vec{E}$  et de symétrie pour  $\vec{B}$ .
- Soit  $z = 0$  un plan de symétrie du champ  $\vec{X}(\vec{r})$  dans un repère cartésien  $(x, y, z)$ , on a :

$$\vec{X}_N(x, y, z) = -\vec{X}_N(x, y, -z),$$

$$\vec{X}_T(x, y, z) = \vec{X}_T(x, y, -z),$$

où  $\vec{X}_N$  et  $\vec{X}_T$  sont les composantes normale et tangentielle de  $\vec{X}$  par rapport à ce plan. Pour  $z = 0$ , on a  $\vec{X}_N = \vec{0}$ , et  $\vec{X}(x, y, 0)$  est donc contenu dans le plan de symétrie.

- Soit  $z = 0$  un plan d'antisymétrie du champ  $\vec{X}(\vec{r})$  dans un repère cartésien  $(x, y, z)$ , on a :

$$\vec{X}_N(x, y, z) = \vec{X}_N(x, y, -z),$$

$$\vec{X}_T(x, y, z) = -\vec{X}_T(x, y, -z).$$

où  $\vec{X}_N$  et  $\vec{X}_T$  sont les composantes normale et tangentielle de  $\vec{X}$  par rapport à ce plan. Pour  $z = 0$ , on a  $\vec{X}_T = \vec{0}$ , et  $\vec{X}(x, y, 0)$  est donc perpendiculaire au plan de symétrie.

- On considère les champs à grande distance de distributions finies de charges et de courants, de charge totale  $Q$ . En électrostatique, magnétostatique, et dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), on a :
  - ★ si  $Q \neq 0$ ,  $\vec{E}$  et  $V$  décroissent respectivement en  $r^{-2}$  et  $r^{-1}$ ,
  - ★ si  $Q = 0$ ,  $\vec{E}$  et  $V$  décroissent respectivement au moins en  $r^{-3}$  et  $r^{-2}$ ,
  - ★ quelle que soit  $Q$ ,  $\vec{B}$  décroît au moins en  $r^{-3}$ .
- Discontinuité des champs électriques et magnétiques :
  - ★ les champs  $\vec{E}$  ne sont pas définis sur une distribution surfacique de charges,
  - ★ les champs  $\vec{B}$  ne sont pas définis sur une distribution linéique de courants.

## Constantes fondamentales

- Vitesse de la lumière  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Constante de Planck  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permeabilité magnétique du vide  $\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
- Masse de l'électron  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

On rappelle que  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ .

# Première partie

## Énergie électrostatique

On étudie dans cette partie l'énergie de systèmes électrostatiques à l'équilibre, ou en déplacements quasi-statiques. On négligera donc tout effet lié aux champs magnétiques. Sauf mention contraire, on n'étudiera que des systèmes d'extension spatiale finie. Par convention, on considérera que l'énergie d'interaction électrostatique entre deux systèmes d'extension spatiale finie tend vers zéro quand la distance entre ceux-ci tend vers l'infini.

### 1.1 Énergie d'un système de charges ponctuelles

On rappelle que la force de Coulomb d'une charge  $q_1$  sur une charge  $q_2$  s'écrit

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}^3}, \quad (8)$$

où  $\overrightarrow{r_{12}}$  est le vecteur repérant la position de  $q_2$  par rapport à celle de  $q_1$ .

**1** - On considère un système de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ . La charge  $q_1$  étant fixe, on déplace  $q_2$  de façon quasi-statique à partir de l'infini jusqu'à une distance  $r_{12}$ . Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique  $U_{12}$  associée au travail de  $q_1$  sur  $q_2$ , que l'on exprimera en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_{12}$  et  $\epsilon_0$ .

**2** - On considère à présent la charge  $q_2$  fixe, et on déplace  $q_1$ . Déterminer la force  $\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}$  dérivant de l'énergie potentielle obtenue précédemment. Cette énergie potentielle décrit-elle complètement l'interaction électrostatique entre les deux charges ?

**3** - En déduire le facteur  $a$  tel que l'énergie électrostatique  $U_q$  d'un système  $S_q = \{q_i\}_{1 \leq i \leq N}$  de  $N$  charges s'écrit

$$U_q = a \sum_{i \neq j} q_j V_{i \rightarrow j}, \quad (9)$$

où la somme est prise sur toutes les paires possibles d'indices  $i$  et  $j$  entre 1 et  $N$  telles que  $i \neq j$ , et où l'on définira  $V_{i \rightarrow j}$ . Quel signe peut avoir cette énergie ?

Par la suite, on parlera de l'énergie électrostatique propre  $U$  d'un système  $S$ , ou simplement de son énergie électrostatique, pour décrire l'énergie électrostatique totale de ce système. On parlera également de l'énergie d'interaction électrostatique  $U^{1 \leftrightarrow 2}$  entre deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  pour décrire les interactions électrostatiques entre les constituants de ces systèmes.

**4** - On prend un système de quatre charges  $S_q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  que l'on décompose en deux sous-systèmes  $S_q^\alpha = \{q_1, q_2\}$  et  $S_q^\beta = \{q_3, q_4\}$ . Décomposer l'énergie électrostatique  $U_q$  du système  $S_q$  en l'énergie propre  $U_q^\alpha$  et  $U_q^\beta$  de chaque sous-système et l'énergie d'interaction  $U_q^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  entre les deux sous-systèmes. On exprimera ces énergies en fonction des charges  $q_i$  et des potentiels  $V_{i \rightarrow j}$  définis à la question précédente.

**5** - On généralise à présent au cas de deux systèmes  $S_q^\alpha$  et  $S_q^\beta$  contenant respectivement  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  charges  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq N_\alpha}$  et  $\{q_j\}_{1 \leq j \leq N_\beta}$ . En vous appuyant sur la question précédente, montrer que l'on peut écrire l'énergie d'interaction  $U_q^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  entre  $S_q^\alpha$  et  $S_q^\beta$  sous la forme

$$U_q^{\alpha \leftrightarrow \beta} = b \sum_{j \in S_q^\beta} q_j V_{\alpha \rightarrow j} \quad (10)$$

avec  $b$  un facteur numérique à déterminer et  $V_{\alpha \rightarrow j}$  un potentiel que l'on définira. Obtenir un résultat similaire écrit uniquement à partir d'un potentiel  $V_{\beta \rightarrow i}$ , que l'on définira.

## 1.2 Formulations intégrales de l'énergie électrostatique

Pour un système  $S_\rho$  composé d'une distribution continue de charges  $\rho(\vec{r})$ , on propose la formulation intégrale suivante de l'énergie électrostatique propre :

$$U_\rho = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) V_\rho(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}}, \quad (11)$$

où  $V_\rho(\vec{r})$  est le potentiel créé en  $\vec{r}$  par la distribution  $S_\rho$ . Cette intégrale s'étend sur le support de la distribution de  $\rho$ , mais peut être de façon équivalente considérée sur tout l'espace.

**6** - Pour un système  $S_\rho$  composé de deux sous-systèmes  $S_\rho^\alpha$  et  $S_\rho^\beta$ , de distributions de charges  $\rho_\alpha(\vec{r})$  et  $\rho_\beta(\vec{r})$ , et créant respectivement des potentiels  $V_\alpha(\vec{r})$  et  $V_\beta(\vec{r})$ , décomposer l'énergie électrostatique  $U_\rho$  du système  $S_\rho$  en l'énergie propre  $U_\rho^\alpha$  et  $U_\rho^\beta$  de chaque sous-système et l'énergie d'interaction  $U_\rho^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  entre les deux sous-systèmes.

Dans la suite, on admettra que l'énergie d'interaction électrostatique entre deux systèmes  $S_\rho^\alpha$  et  $S_\rho^\beta$  peut aussi s'écrire :

$$U_\rho^{\alpha \leftrightarrow \beta} = \iiint \rho_\alpha(\vec{r}) V_\beta(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}} = \iiint \rho_\beta(\vec{r}) V_\alpha(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}}. \quad (12)$$

L'égalité entre ces termes est parfois appelé le théorème de réciprocité en électrostatique.

**7** - Voyez-vous une différence entre les formulations  $U_q$  et  $U_q^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  obtenues pour des systèmes de charges ponctuelles, et celles  $U_\rho$  et  $U_\rho^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  obtenues pour des distributions continues de charges ?

**8** - Déterminer et commenter les modifications de  $U_\rho$  et  $U_\rho^{\alpha \leftrightarrow \beta}$  si le potentiel électrostatique est redéfini à une constante  $\Delta V$  près. On pourra introduire les charges totales  $Q$ ,  $Q_\alpha$  et  $Q_\beta$  contenues dans les systèmes  $S_\rho$ ,  $S_\rho^\alpha$  et  $S_\rho^\beta$ .

**9** - À partir de l'équation (11), que l'on écrira comme une intégrale sur tout l'espace, montrer que l'on peut écrire l'énergie électrostatique de tout système  $S_\rho$  d'extension spatiale finie sous la forme

$$U_{\text{es}} = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}}, \quad (13)$$

où  $\vec{E}(\vec{r})$  est le champ électrostatique créé par ce système, et où l'intégrale est prise sur tout l'espace.

**10** - Commenter le signe de cette énergie. Comment expliquer la différence avec le résultat obtenu pour des charges ponctuelles ? Le signe de cette énergie permet-il d'avoir une interaction attractive entre systèmes électrostatiques ?

**11** - Calculer l'énergie électrostatique  $U_{\text{es}}$  d'un système composé d'une unique charge ponctuelle  $q$ . Commenter sur la possibilité d'utiliser les formulations des équations (11) et (13) pour décrire un système de charges ponctuelles.

**12** - On considère un système de deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  aux positions  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  par rapport à une origine  $O$ . En utilisant l'équation (13), décomposer l'énergie électrostatique totale  $U_{\text{es}}$  de ce système de charges en des termes d'énergie propre et d'énergie d'interaction. Calculer la ou les intégrales non-divergentes, pour obtenir un résultat que l'on mettra sous la forme la plus simple possible, et qui dépendra de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $\epsilon_0$  et  $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Commenter.

### 1.3 Énergie électrostatique et grandeurs nivélées

*Pour éviter d'avoir des divergences, et pour permettre une modélisation continue, on décrit généralement les distributions de charges avec des grandeurs nivélées. Partant d'une distribution de  $N$  charges ponctuelles  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq N}$  situées aux positions  $\{\vec{r}_i\}_{1 \leq i \leq N}$ , la distribution de charges nivélées est définie à l'aide d'une fonction fenêtre  $f(\vec{r})$  :*

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (14)$$

*Par la suite, on suppose que  $f(\vec{r})$  est positive et vérifie :*

$$\iiint f(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}} = 1, \quad (15)$$

*où l'intégrale est prise sur tout l'espace. On supposera également que  $f(\vec{r})$  est à symétrie sphérique, et qu'elle ne prend des valeurs non-nulles que jusqu'à une distance  $R$  de son centre.*

**13** - Représenter graphiquement le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution de charges nivélées. Quelle est la charge totale contenue dans  $\rho$  ?

**14** - Écrire explicitement la fonction  $f(\vec{r})$  pour une charge nivélée de manière homogène sur une boule de rayon  $R$ .

*Par la suite, on notera  $\rho_{q_i}$  la distribution de charge nivélée associée à une charge  $q_i$ , que l'on repérera par la position  $\vec{r}_i$  de son centre.*

**15\*** - Montrer que le potentiel électrique créé par une distribution de charges d'extension spatiale finie, et telle qu'il existe  $\rho_M$  vérifiant  $|\rho(\vec{r})| < \rho_M$  pour tout  $\vec{r}$ , est de valeur finie en tout point.

**16** - En déduire que l'énergie électrostatique d'une distribution contenant une quantité finie de charges nivélées ne diverge pas.

*L'utilisation de grandeurs nivélées permet donc d'éviter les divergences apparaissant avec des charges ponctuelles. Dans les questions suivantes, on étudie comment l'énergie électrostatique est modifiée en travaillant avec de telles grandeurs plutôt qu'avec des charges ponctuelles.*

**17** - Calculer l'énergie électrostatique propre  $U_{B_R}$  d'une charge ponctuelle  $q$  nivélée, pour une fenêtre  $f(\vec{r})$  qui correspond à une boule homogène de rayon  $R$ . On exprimera cette énergie en fonction de  $q$ ,  $\epsilon_0$  et  $R$ .

**18** - En relativité, on associe une énergie à toute masse, par la formule  $E = mc^2$ . En modélisant l'électron comme une boule homogène, et en supposant que toute la masse d'un électron est due à son énergie électrostatique, quel serait son rayon  $r_e$  ? On tiendra compte pour cela du champ électrique à l'intérieur comme à l'extérieur de l'électron. On entend généralement que la description classique d'un électron n'est plus valide en dessous de ce rayon. À cette échelle, a-t-on déjà atteint d'autres limitations de la physique classique ?

**19\*** - On considère à présent deux charges nivélées  $q_1$  et  $q_2$ , séparées par une distance  $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Par un raisonnement physique ne demandant pas de développements calculatoires poussés, expliquer pourquoi l'énergie d'interaction électrostatique  $U_{12}$  entre ces deux charges nivélées est la même que celle obtenue sans le nivelingement, tant que les deux supports nivélés de  $\rho_{q_1}$  et  $\rho_{q_2}$  ne se recoupent pas.

**20\*** - On étudie à présent la situation où les deux charges nivélées s'interpénètrent. On se place dans le cas où les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposés, et où la fonction fenêtre correspond à une boule homogène de rayon  $R$ . Par un raisonnement physique ne demandant pas de développements calculatoires poussés, mais pouvant reposer sur des schémas, montrer que l'énergie d'interaction  $U_{12}$  entre les charges est une fonction décroissante de la distance  $r_{12}$  entre leurs centres, et que la configuration d'énergie minimum est celle où ces deux charges sont superposées. On note  $U_{12}^m$  la valeur absolue de l'énergie associée à cette configuration.

**21** - On admet que le résultat de la question précédente est valable pour toute fenêtre vérifiant  $f(\vec{r}) \geq 0$ . Tracer un graphique représentatif de l'énergie d'interaction  $U_{12}$  entre deux charges ponctuelles ou nivélées en fonction de la distance  $r_{12}$  entre leurs centres, en y faisant apparaître les grandeurs pertinentes. On considérera les cas où  $q_1 q_2 < 0$  et  $q_1 q_2 > 0$ .

**22** - Expliquer pourquoi l'introduction de grandeurs nivélées revient à introduire une distance effective minimale  $r_{\min}$  entre charges. Calculer cette distance minimale pour  $|q_2| = |q_1|$ , lorsque  $f(\vec{r})$  correspond à une boule homogène.

## 1.4 Étude d'un système de sphères concentriques

On considère deux conducteurs sphériques  $S^a$  et  $S^b$  concentriques, de rayons  $R^a$  et  $R^b$  vérifiant  $R^a < R^b$ , et de charges respectives  $Q^a$  et  $Q^b$ . Ces charges sont réparties de façon homogène sur les sphères. Pour toute cette section, on se place en coordonnées sphériques centrées sur le centre des sphères étudiées.

On veut décomposer l'énergie électrostatique du système en la somme de l'énergie propre de chaque sphère et de l'énergie d'interaction électrostatique entre les deux sphères. Pour calculer ces énergies, on va étudier les travaux mis en jeu lorsque les deux sphères changent de rayon, avant de faire une comparaison avec les résultats obtenus en utilisant la formulation de l'énergie électrostatique introduite dans l'équation (13).

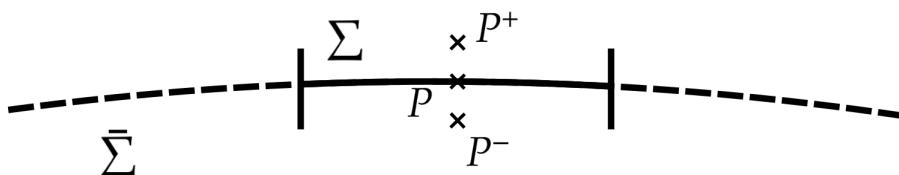


FIGURE 1 – Vue de coupe de l'élément  $\Sigma$  sur la sphère  $S$ , avec en pointillés le reste  $\bar{\Sigma}$  de la sphère. Les points  $P$ ,  $P^-$  et  $P^+$  ont également été représentés.

On considère pour commencer une sphère seule  $S$ , de rayon  $R$ , de densité surfacique de charges  $\sigma$ , et de charge totale  $Q$ . On commence par calculer directement le travail fourni par la sphère sur elle-même lorsqu'elle change de rayon. Cela est cependant rendu difficile par le fait que le champ électrique créé par une distribution surfacique de charges diverge sur cette même surface.

Pour résoudre ce problème, on considère un élément  $\Sigma$  de la sphère, de la forme d'un carré de centre  $P$ , de côté  $b$  négligeable par rapport à  $R$ , et que l'on peut donc considérer comme plan. On va calculer la force exercée par le reste de la sphère  $\bar{\Sigma}$  sur cet élément, en faisant l'hypothèse que le champ

électrique  $\vec{E}_{\bar{\Sigma}}$  créé par  $\bar{\Sigma}$  est homogène sur  $\Sigma$ , et peut donc être évalué en  $P$ . On note également  $\vec{E}_S$  et  $\vec{E}_{\Sigma}$  les champs créés par  $S$  et  $\Sigma$ , respectivement.

On se place en coordonnées sphériques avec pour origine le centre de  $S$ , et on définit les trois points  $P$ ,  $P^-$  et  $P^+$ , alignés sur un même rayon, et situés respectivement aux distances  $r = R$ ,  $r = R - \epsilon$  et  $r = R + \epsilon$  du centre de  $S$ . Ces trois points sont donc respectivement dans, en dessous et au dessus de  $\Sigma$  (voir Figure 1).

**23** - En procédant par étapes, calculer la valeur du champ électrique créé par  $\bar{\Sigma}$  en  $P$  :

- Calculer le champ  $\vec{E}_S$  créé par  $S$  en  $P^-$ , puis en  $P^+$ .
- Sans effectuer un calcul explicite, montrer que l'on peut déterminer un facteur numérique  $\alpha$  tel que  $\vec{E}_{\Sigma}(P^-) = \alpha \vec{E}_{\Sigma}(P^+)$ . Quelle est la valeur du champ créé par  $\Sigma$  en  $P$ ?
- En considérant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , en déduire la valeur du champ  $\vec{E}_{\bar{\Sigma}}$  créé par  $\bar{\Sigma}$  en  $P$ , que l'on exprimera en fonction de  $R$ ,  $Q$  et  $\epsilon_0$ .

**24** - En ne considérant pour chaque élément  $\Sigma$  de  $S$  que la force exercée par  $\bar{\Sigma}$  sur celui-ci, en déduire que la sphère exerce sur elle-même une force qui peut être décrite comme une force de pression, qui vaut, sur un élément  $d\vec{S}$  orienté vers l'extérieur,

$$d\vec{F} = P_{es} d\vec{S}, \quad (16)$$

où l'on exprimera  $P_{es}$  en fonction de  $\sigma$  et  $\epsilon_0$ . Commenter le sens de cette force en fonction du signe de la charge totale  $Q$ .

**25** - À partir du travail  $W$  fourni par la sphère sur elle-même lors d'une transformation quasi-statique l'amenant d'un rayon  $R_1$  à un rayon  $R_2$ , calculer la variation d'énergie propre  $\Delta U$  associée. En déduire l'énergie electrostatique  $U_S(R)$  d'une sphère de rayon  $R$ , en supposant que cette énergie tend vers zéro lorsque  $R \rightarrow \infty$ . On écrira cette énergie en fonction de  $R$ ,  $Q$  et  $\epsilon_0$ .

**26** - On revient à présent à l'étude des deux sphères  $S^a$  et  $S^b$ . La sphère intérieure  $S^a$  étant de rayon  $R^a$  fixé, calculer le travail  $W_{a \rightarrow b}$  qu'elle fournit à la sphère extérieure  $S^b$  lorsque cette dernière passe de façon quasi-statique d'un rayon  $R_1^b$  à un rayon  $R_2^b$ . On écrira ce travail en fonction de  $Q^a$ ,  $Q^b$ ,  $\epsilon_0$  et des rayons en question.

**27** - La sphère extérieure  $S^b$  étant de rayon  $R^b$  fixé, calculer le travail  $W_{b \rightarrow a}$  qu'elle fournit à la sphère intérieure  $S^a$  lorsque celle-ci passe de façon quasi-statique d'un rayon  $R_1^a$  à un rayon  $R_2^a$ . Ce résultat est-il en contradiction avec la troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques?

**28** - Des résultats précédents, déduire l'énergie  $U_{tot}$  de l'ensemble des deux sphères conductrices pour une configuration donnée où  $R^b > R^a$ , que l'on exprimera en fonction de  $Q^a$ ,  $Q^b$ ,  $\epsilon_0$  et des rayons en question. Que peut-on dire de son signe?

**29** - Comparer avec le résultat obtenu en utilisant l'équation (13), pour  $Q_a = Q = -Q_b$ .

**30\*** - Quelle est la limite de cette énergie quand  $R_a$  et  $R_b$  tendent vers l'infini? Ce résultat est-il compatible avec le fait de prendre en compte l'énergie propre des charges individuelles composant ces sphères? On pourra revenir sur une ou plusieurs des hypothèses effectuées dans cette partie. La réponse à cette question, qui pourra utiliser des résultats obtenus précédemment, ne demande pas de développements calculatoires poussés.

# Deuxième partie

## Énergie magnétique

On étudie dans cette partie l'énergie de distributions de courants dans des circuits conducteurs non-magnétiques. Sauf mention contraire, on n'étudiera que des systèmes d'extension spatiale finie. Par convention, on considérera que l'énergie d'interaction magnétique entre deux systèmes d'extension spatiale finie tend vers zéro quand la distance entre ceux-ci tend vers l'infini.

Dans toute cette partie, on se place également dans l'approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) magnétique. Dans cette approximation, les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}. \quad (17)$$

On a également

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (18)$$

et l'on supposera que l'on peut décomposer toute distribution volumique de courants en une somme continue de distributions filiformes à courant constant.

### 2.1 Travail des forces de Laplace et théorème de Maxwell

On cherche à estimer l'énergie associée à une distribution de courants dans un champ magnétique. Pour ce faire, on commence par suivre le même raisonnement que dans le début de la partie précédente, en étudiant le travail reçu par un élément de circuit parcouru par un courant lorsqu'il est déplacé dans un champ magnétique.

**31** - On considère un circuit filiforme orienté  $C$ , parcouru par un courant constant  $I$  et déplacé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . On considère un élément  $d\vec{l}$  de ce circuit, soumis à un déplacement  $d\vec{u}$ . Montrer que le travail élémentaire de la force de Laplace sur cet élément pour ce déplacement vaut

$$\delta w_L = I \vec{B} \cdot (d\vec{u} \wedge d\vec{l}). \quad (19)$$

**32** - À l'aide d'un schéma, identifier  $d\vec{u} \wedge d\vec{l}$  à un élément de surface  $d\vec{S}$ . En déduire que le travail des forces de Laplace sur le circuit  $C$  lors d'une translation élémentaire  $d\vec{u}$  vaut

$$\delta W_L = I d\Phi_c, \quad (20)$$

où  $d\Phi_c$  est un flux infinitésimal de champ magnétique sur une surface  $d\Sigma_c$  que l'on représentera graphiquement. Préciser explicitement sur le schéma l'orientation des vecteurs  $d\vec{S}$ .

**33** - On suppose que le circuit  $C$ , parcouru par un courant constant  $I$ , subit un déplacement entre une position initiale à  $t_{\text{ini}}$  et une position finale à  $t_{\text{fin}}$ . Si l'on ne fixe aucune contrainte sur le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  :

- L'intégration sur cette trajectoire du travail élémentaire précédent peut-elle être exprimée uniquement à partir des positions initiale et finale du circuit ?
- Peut-elle être exprimée sinon à partir de la donnée de la trajectoire géométrique du circuit entre ces deux positions ?
- Qu'en est-il si l'intensité  $I$  parcourant le circuit varie avec le temps ?

**34** - On suppose à présent que le circuit  $C$  effectue un déplacement à courant  $I$  toujours constant, mais dans un champ  $B(\vec{r})$  stationnaire. Montrer que le travail des forces de Laplace pour un déplacement fini correspond à

$$W_L = \eta I \Delta \Phi, \quad (21)$$

où  $\Delta \Phi = \Phi_{\text{fin}} - \Phi_{\text{ini}}$  est la variation de flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit  $C$ , entre ses configurations initiale et finale, notées  $C_{\text{ini}}$  et  $C_{\text{fin}}$ , et  $\eta$  est un facteur numérique à déterminer. On s'appuiera en particulier sur un schéma où l'on fera apparaître clairement les différentes grandeurs introduites. Ce résultat constitue le *théorème de Maxwell*.

**35** - En déduire l'énergie potentielle d'interaction  $U_I$  d'un circuit  $C$  parcouru par un courant  $I$  constant dans un champ  $B(\vec{r})$  stationnaire. Que peut-on en déduire sur les déplacements spontanés d'un circuit rigide à courant constant dans un champ magnétique stationnaire ? Cette conclusion est-elle valide a priori pour des circuits non-rigides ?

*On va vérifier la validité du théorème de Maxwell sur des cas simples. On considère pour cela un solénoïde  $S$  de longueur  $L$  grande devant son rayon  $R$ , et bobiné avec  $n$  spires par unité de longueur, parcourues par un courant  $I_0$ . On se place dans un repère cartésien  $(x, y, z)$  tel que l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  est l'axe de symétrie de révolution du solénoïde. Le champ magnétique que celui-ci génère peut être approximé dans la suite, sauf mention contraire explicite, par celui d'un solénoïde infiniment long. On rappelle que le champ magnétique créé par un tel solénoïde est nul à l'extérieur de celui-ci, et vaut en son intérieur :*

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z = \mu_0 n I_0 \vec{e}_z. \quad (22)$$

*On commence par étudier le travail que reçoit une spire rigide carrée, de côté  $a$ , au cours de ses déplacements à l'intérieur du solénoïde. On suppose que cette spire, parcourue par un courant constant  $I_s$ , est disposée initialement dans le plan  $(x, y)$ , centrée sur l'axe de symétrie du solénoïde, et de telle façon que le flux magnétique du champ du solénoïde à travers cette spire soit positif. On considère deux trajectoires, en supposant que la spire reste à l'intérieur du solénoïde :*

*A1 : la spire subit une translation dans le plan  $(x, y)$ .*

*A2 : la spire subit une rotation autour d'une droite passant par son centre et alignée avec l'axe  $y$ , jusqu'à se trouver dans le plan  $(y, z)$ .*

**36** - Calculer le travail des forces de Laplace sur la spire dans le cas A1, et le comparer au travail prédit par le théorème de Maxwell.

**37** - Calculer le travail des forces de Laplace sur la spire dans le cas A2, et le comparer au travail prédit par le théorème de Maxwell. On pourra utiliser sans la redémontrer, mais en justifiant sa validité, l'expression

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0, \quad (23)$$

du couple subi par un dipôle magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  dans un champ uniforme  $\vec{B}_0$ . On pourra également accompagner les calculs d'un schéma.

*On considère à présent une variation du rayon  $R$  du solénoïde  $S$  introduit précédemment, tout en gardant fixes ses paramètres  $n$  et  $I_0$ . On souhaite calculer le travail qu'il reçoit sous sa propre action lors de cette déformation. Cela est rendu difficile par le fait que lorsqu'on évalue le travail reçu par chaque élément de circuit sous l'action du champ magnétique, il faut exclure l'effet du champ magnétique généré par cet élément de circuit lui-même.*

*Pour étudier ce problème, on va procéder de façon similaire à ce qui a été fait dans la section 1.4 pour l'étude du travail d'une sphère chargée sur elle-même. On considère donc un élément  $\Sigma$  du solénoïde,*

de la forme d'un carré de centre  $P$ , de côté  $b$  négligeable devant  $R$ , et que l'on peut considérer comme plan. On va alors calculer la force exercée par le reste du solénoïde  $\bar{\Sigma}$  sur cet élément, en supposant que le champ magnétique  $\vec{B}_{\bar{\Sigma}}$  créé par  $\bar{\Sigma}$  est homogène sur  $\Sigma$ , et peut donc être évalué en  $P$ . On note  $\vec{B}_{\mathcal{S}}$  et  $\vec{B}_{\Sigma}$  les champs créés par  $\mathcal{S}$  et  $\Sigma$ , respectivement. On décrira les courants dans l'élément  $\Sigma$  comme ceux d'un ensemble de fils parallèles d'épaisseur négligeable.

Par la suite, on pourra utiliser un jeu de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  où l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  reste l'axe de symétrie de révolution du solénoïde.

**38\*** - En vous appuyant notamment sur des schémas clairs, faisant apparaître explicitement les différents éléments du raisonnement, calculer la valeur du champ magnétique  $\vec{B}_{\bar{\Sigma}}$  créé par  $\bar{\Sigma}$  au point  $P$ .

**39** - En déduire que le solénoïde exerce sur lui-même une force qui peut être décrite comme une force de pression, qui vaut sur un élément  $d\vec{S}$  orienté vers l'extérieur :

$$d\vec{F} = P_{ms} d\vec{S}, \quad (24)$$

où l'on exprimera  $P_{ms}$  en fonction des paramètres pertinents du système. Commenter le sens de cette force en fonction du signe du courant  $I_0$ .

**40** - En déduire le travail reçu par le solénoïde sous sa propre action lorsqu'il passe de façon quasi-statique d'un rayon  $R$  à un rayon  $2R$ . Comparer ce résultat à celui obtenu par le théorème de Maxwell. Si ceux-ci ne sont pas en accord, proposer une justification.

## 2.2 Énergie d'une distribution volumique de courants

Pour estimer l'énergie magnétique associée à une distribution de courants dans un cadre général d'ARQS, on va procéder différemment de la section précédente. Plutôt que de considérer le travail exercé sur des circuits dans lesquels circule déjà un courant, on va étudier le travail reçu par les charges mobiles de ces circuits lors de l'établissement d'une distribution de courants. Cela requiert d'effectuer un bilan énergétique précis.

**41** - Une distribution de courants d'extension spatiale finie peut-elle rayonner de l'énergie dans l'ARQS magnétique ?

On considère un système  $\mathcal{D}$  de charge totale nulle et d'extension spatiale finie, constitué d'un ensemble de circuits conducteurs fixes, non-magnétiques, et pouvant être parcourus par un courant. On note  $\rho_e$  la densité de porteurs de charges mobiles, que l'on supposera être uniquement des électrons de charge  $-e$ . On note également  $\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e$  le vecteur densité de courant associé au déplacement de ces électrons, de vitesse moyenne  $\vec{v}_e$ . On suppose qu'à  $t \leq 0$ , aucun courant ne circule dans le système. Le système  $\mathcal{D}$  étant plongé dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , on établit progressivement une distribution de courants jusqu'à atteindre un état stationnaire pour  $t \geq T$ , où les courants sont constants. On veut faire un bilan de l'énergie fournie à la distribution de charges entre les instants  $t = 0$  et  $t = T$ . À l'instant  $t = 0$ , où toutes les charges sont au repos, on prend comme convention une énergie totale nulle pour ces charges.

**42** - Montrer que la puissance totale fournie à chaque instant à la distribution de charges par le champ électromagnétique s'écrit

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \, d\tau_{\vec{r}}. \quad (25)$$

Montrer que la contribution de la composante électrostatique du champ  $\vec{E}$  à cette puissance est nulle. Quelle autre composante du champ électrique peut avoir une contribution non-nulle ?

**43** - On considère un volume sphérique  $\mathcal{V}_R$  fixe, de rayon  $R$ , délimité par la sphère  $\Sigma_R$ , de normales dirigées vers l'extérieur. Le volume  $\mathcal{V}_R$  est défini de telle façon qu'il contienne le système  $\mathcal{D}$ . Montrer que l'on a, à tout instant,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}_R} \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}} = - \iint_{\Sigma_R} \vec{\pi}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_{\vec{r}} - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\tau_{\vec{r}}, \quad (26)$$

où  $\vec{\pi}$  est le vecteur de Poynting, dont on donnera la définition.

**44** - En déduire que l'énergie magnétique totale stockée dans le système de courants pour  $t > T$  s'écrit :

$$U_{ms} = \iiint \frac{\vec{B}^2(\vec{r})}{2\mu_0} d\tau_{\vec{r}}, \quad (27)$$

où l'intégrale est prise sur tout l'espace.

**45** - On considère à nouveau le solénoïde introduit dans la section précédente. Calculer la variation d'énergie magnétique quand celui-ci passe d'un rayon  $R$  à un rayon  $2R$ . Commenter.

**46** - On considère à présent un système  $S_j$  constitué d'un ensemble  $S_j^a$  de distributions de courants. Identifier dans l'énergie magnétique  $U_{ms}$  de  $S_j$  les contributions  $U_j^a$  d'énergies propres de chaque distribution, et les contributions  $U_j^{a \leftrightarrow b}$  d'énergies d'interaction entre distributions. Commenter le signe de chaque énergie.

## 2.3 Énergie d'un ensemble de circuits filiformes

On considère à présent un ensemble de circuits filiformes fermés  $C_a$ , modélisés par des contours orientés  $\Gamma_a$  parcourus par des courants  $I_a$ . On veut exprimer l'énergie magnétique de ce système à partir des courants parcourant ces circuits, et de leurs flux magnétiques. Le flux magnétique  $\Phi_a$  à travers un circuit  $C_a$  est défini sur une surface  $\Sigma_a$  reposant sur le contour  $\Gamma_a$ , non-nécessairement plane, et d'orientation compatible avec celle de  $\Gamma_a$  :

$$\Phi_a = \iint_{\Sigma_a} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_{\vec{r}}, \quad (28)$$

où  $\vec{B}(\vec{r})$  est le champ magnétique total. On définit similairement le flux magnétique créé par un circuit au travers d'un autre :

$$\Phi_{a \rightarrow b} = \iint_{\Sigma_b} \vec{B}_a(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_{\vec{r}}, \quad (29)$$

où  $\vec{B}_a$  désigne le champ magnétique créé par le circuit  $C_a$ . On souligne que  $\Phi_{a \rightarrow a}$  ne correspond pas forcément à  $\Phi_a$ .

**47** - Montrer que le flux magnétique  $\Phi_a$  à travers le circuit  $C_a$  ne dépend pas de la surface  $\Sigma_a$  choisie, tant que celle-ci repose sur  $\Gamma_a$  et est d'orientation compatible avec celle de  $\Gamma_a$ .

Pour tout champ magnétique  $\vec{B}$ , on peut définir des tubes de champ, dont les surfaces latérales sont en tout point tangentes aux lignes de champ magnétique. On définit un tube de champ élémentaire comme un tube de champ de section suffisamment petite pour que le champ magnétique  $\vec{B}$  dans toute

coupe transverse puisse être considéré comme uniforme. Par la suite, on note  $t_\alpha$  ces tubes de champ élémentaires, que l'on décrit par leur élément de longueur  $d\vec{l}_\alpha(\vec{r})$  et de surface transverse  $d\vec{s}_\alpha(\vec{r})$  (voir Figure 2). Dans ces tubes de champ élémentaires, les vecteurs  $\vec{B}(\vec{r})$ ,  $d\vec{l}_\alpha(\vec{r})$  et  $d\vec{s}_\alpha(\vec{r})$  sont colinéaires et de même sens, et le volume d'un élément de tube de champ de longueur  $d\vec{l}_\alpha$  est  $d\tau_r = d\vec{l}_\alpha(\vec{r}) \cdot d\vec{s}_\alpha(\vec{r})$ . On note que le champ  $\vec{B}(\vec{r})$  ainsi que les éléments  $d\vec{l}_\alpha(\vec{r})$  et  $d\vec{s}_\alpha(\vec{r})$  peuvent varier le long des tubes de champ élémentaires.

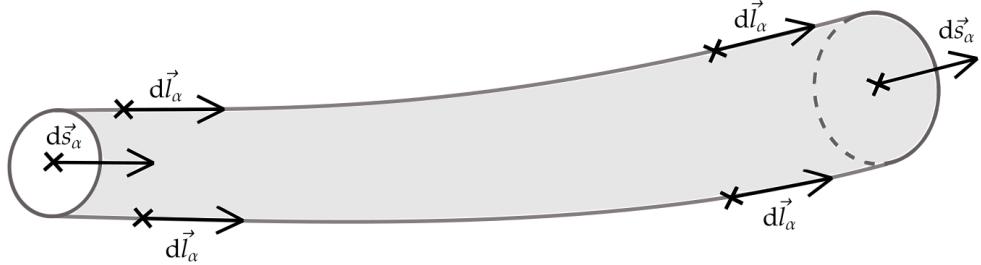


FIGURE 2 – Tube de champ magnétique élémentaire.

48 - Montrer que le flux magnétique transverse est conservé le long d'un tube de champ.

49 - Justifier que les tubes de champ sont soit refermés sur eux-mêmes, soit vont à l'infini.

Par la suite, on considérera que l'on peut négliger la contribution des tubes qui vont à l'infini.

50 - Montrer que les tubes de champ qui se referment sur eux-mêmes entourent forcément des branches de circuits dans lesquelles circulent des courants.

51\* - On considère un unique circuit filiforme fermé  $C_a$ . En décomposant tout l'espace où le champ magnétique  $\vec{B}_a$  est non-nul en tubes de champ élémentaires, montrer à partir de la formulation donnée équation (27) que l'énergie magnétique propre de ce circuit s'écrit :

$$U_C^a = \beta_1 I_a \Phi_{a \rightarrow a}, \quad (30)$$

avec  $\beta_1$  un facteur numérique à déterminer. On expliquera avec soin, en s'aidant si possible de schémas, les différentes étapes du raisonnement effectué.

52\* - Par un raisonnement similaire, obtenir la forme de l'énergie magnétique d'interaction  $U_C^{a \leftrightarrow b}$  entre les circuits  $C_a$  et  $C_b$ , que l'on exprimera en fonction de  $I_b$  et  $\Phi_{a \rightarrow b}$ . On supposera pour simplifier la démonstration que l'on travaille avec des circuits simples non-bobinés, et que les lignes de champ de  $\vec{B}_a$  et  $\vec{B}_b$  ne passent au maximum qu'une seule fois à travers ces deux circuits. On effectuera également la décomposition de  $\vec{B}_a$  et  $\vec{B}_b$  en tubes de champ élémentaires qui ont tous le même flux transverse  $d\phi$ . Sous quelle condition cette énergie d'interaction est-elle maximale ?

53 - En déduire que l'énergie magnétique totale d'un système de circuits  $C_a$  parcourus par des courants  $I_a$  s'écrit

$$U_C = \beta_2 \sum_{a,b} I_a \Phi_{b \rightarrow a}, \quad (31)$$

avec  $\beta_2$  un facteur numérique à déterminer, et où la somme inclut les cas où  $a = b$ . Formuler le théorème de réciprocité en magnétostatique.

**54** - Préciser si les énergies magnétiques propre et d'interaction entre circuits changent de signe si le courant d'un des circuits en jeu change de signe. Quels signes peuvent avoir chacune de ces énergies ? Ces résultats étaient-ils attendus pour l'énergie d'interaction entre circuits magnétiques ?

**55** - On reprend l'exemple A2 décrit dans la section 2.1. Effectuer à nouveau le calcul de l'énergie magnétique de la configuration finale, mais en utilisant cette fois le flux de la spire sur le solénoïde.

*On étudie à présent un dernier exemple, nommé A3, où l'on prend en compte la longueur finie du solénoïde, et où l'on l'étudie la translation, à courants constants, de la spire précédente sur l'axe du solénoïde. La spire reste orientée parallèlement au plan ( $x, y$ ), mais se déplace du milieu du solénoïde ( $z = L/2$ ) à son extrémité ( $z = 0$ ), tout en restant centrée sur l'axe de symétrie du solénoïde. On suppose par ailleurs que le solénoïde est suffisamment long pour que :*

- a) le champ d'un solénoïde infini y règne à  $z = L/2$ ,*
- b) le flux du champ créé par la spire à travers les extrémités du solénoïde est négligeable lorsque la spire est située en  $z = L/2$ .*

**56\*** - Par un raisonnement physique ne demandant pas de développements calculatoires poussés, mais pouvant reposer sur des schémas, calculer le travail quasi-statique nécessaire pour effectuer le déplacement de l'exemple A3.

## 2.4 Énergie propre des circuits magnétiques

*Dans cette section, on cherche à faire le lien entre l'énergie magnétique propre d'une distribution de courant, et l'énergie cinétique des électrons qui composent ce courant. En effet, on a vu dans la première partie que l'on pouvait associer l'énergie de masse  $m_e c^2$  d'un électron à son énergie propre électrostatique. En considérant uniquement le champ électrique à l'extérieur d'un électron de rayon  $r_e$ , on a :*

$$m_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e c^2}. \quad (32)$$

*Pour déterminer l'énergie magnétique propre d'un électron, on a besoin de calculer le champ magnétique créé par celui-ci quand il est en mouvement, ce que l'on souhaite faire à partir d'un changement de référentiel. On note pour cela  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  les champs électrique et magnétique dans un référentiel Galiléen  $\mathcal{R}$ , et  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  ces champs dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant en translation rectiligne uniforme à vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .*

**57** - En mécanique Newtonienne, la force subie par un point matériel ne doit pas changer lorsqu'on passe d'un référentiel Galiléen à un autre par une translation rectiligne uniforme. Déduire dans ce cadre le champ magnétique créé par un électron, que l'on suppose ponctuel, se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_e$ . Commenter ce résultat.

*On se place à présent dans le cadre d'une transformation relativiste des champs électromagnétiques. En prenant les notations décrites plus haut, les champs  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , se déplaçant en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , s'écrivent :*

$$\begin{cases} \vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}, \\ \vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}, \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \wedge \vec{B}), \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma (\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{V} \wedge \vec{E}), \end{cases} \quad (33)$$

où l'on a distingué avec les notations  $\parallel$  et  $\perp$  les composantes des champs respectivement parallèles et perpendiculaires au vecteur  $\vec{V}$ , et où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (34)$$

**58** - En déduire l'expression des champs électrique et magnétique créés par un électron se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_e$ , que l'on écrira en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $e$ ,  $\vec{v}_e$  et du vecteur  $\vec{r}$  repérant le point où le champ est considéré par rapport à la position de l'électron. On supposera que l'électron se déplace à une vitesse  $v_e \ll c$  et on ne gardera que les termes dominants en  $v_e/c$ .

**59** - On considère un électron de rayon  $r_e$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_e$ . Justifier qu'à un facteur numérique  $\lambda$  près, proche de l'unité, on peut interpréter l'énergie magnétique  $U_m^e$  associée au champ créé par l'électron comme l'énergie cinétique de celui-ci. On utilisera l'équation (27) en ne considérant que la contribution liée au champ à l'extérieur de l'électron. Dans le cadre de cette interprétation, à quoi correspond la *masse* de l'électron ? Dans la suite, on omettra le facteur  $\lambda$ .

**60** - On considère à présent un solénoïde de longueur  $L$ , composé de  $N$  spires circulaires de rayon  $R$  parcourues par un courant  $I$ . On suppose que les fils de ce solénoïde sont de section circulaire, de rayon  $a$ , et contiennent  $n_e$  électrons de conduction par unité de volume. Calculer l'énergie cinétique totale  $E_c^{\text{tot}}$  des électrons de conduction dans ce solénoïde, que l'on exprimera en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $n_e$  et des paramètres du circuit.

**61** - En effectuant une application numérique, comparer cette énergie cinétique à l'énergie magnétique propre du solénoïde. On pourra utiliser le champ créé par un solénoïde infini, et ne calculer que la contribution à l'énergie magnétique du champ à l'intérieur du solénoïde. On prendra  $n_e = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (densité typique des électrons de conduction pour le cuivre),  $I = 1,0 \text{ A}$ ,  $N = 5000$ ,  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $L = 20 \text{ cm}$ ,  $a = 1,0 \text{ mm}$ .

**62\*** - D'où vient la différence constatée à la question précédente ? En vous appuyant sur un exemple simple, déterminer une borne supérieure absolue  $U_{ms}^{\text{max}}$  de l'énergie magnétique du solénoïde en fonction de l'énergie cinétique des électrons de conduction. En donner une estimation numérique. Quelle taille devrait avoir le solénoïde pour que son énergie magnétique approche cette borne ?

\*\*\* *Fin du sujet* \*\*\*