

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2026

JEUDI 16 AVRIL 2026

08h00 - 14h00

FILIERE PC - Epreuve n° 7

PHYSIQUE C

Durée : 6 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Phénomènes d'hystérésis en physique

Le terme d'hystérèse, ou hystérésis, désigne d'une manière générale le comportement d'un système dont la réponse à une cause extérieure dépend non seulement de l'état présent du système, mais aussi de son histoire passée. On trouve des phénomènes de ce type dans des domaines très variés de la connaissance humaine, mais c'est dans le cadre de la physique, et plus exactement du magnétisme, que ce terme a été introduit pour la première fois, à la fin du XIXe siècle.

Dans ce problème, nous explorerons deux systèmes physiques dans lesquels de tels comportements hystérétiques peuvent se manifester. Il est composé de deux parties complètement indépendantes l'une de l'autre. Dans la première partie, nous étudierons la transition de phase hystérétique liquide-solide des milieux granulaires. Dans la seconde partie, nous étudierons les différentes sources d'hystérèse dans les matériaux magnétiques. Chacune de ces parties est composée de sous-parties qui, si elles peuvent être traitées séparément, se verront aborder plus naturellement et plus facilement dans l'ordre.

L'usage de la calculatrice est interdit. *On pourra se servir des graphes de fonctions usuelles de la figure 1 pour les applications numériques. Toutes les réponses devront être dûment justifiées, même lorsque le sujet ne le demande pas explicitement. On essaiera de limiter autant que possible ces justifications, de même que les commentaires demandés par le sujet, à quelques lignes brèves. On veillera à assortir toutes les applications numériques de l'unité associée. Si l'on pense avoir repéré une erreur d'énoncé, on la signalera sur sa copie, on proposera une correction, et on poursuivra le sujet.*

Formulaire

Constantes fondamentales

- Constante de Planck réduite : $\hbar = h/(2\pi) = 1,1 \times 10^{-34}$ J.s
- Charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m⁻¹
- Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8$ m.s⁻²

Notations et relations utiles

- On note $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- La notation $\dot{X}$ désigne la dérivée d'une grandeur X par rapport au temps ;
- La fonction sinus hyperbolique, définie par

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ,$$

est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est notée $\text{Argsh}(x)$, de sorte que

$$\text{Argsh}(\text{sh}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Les fonctions $\text{sh}(x)$ et $\text{Argsh}(x)$ sont toutes deux impaires ;

- On donne la primitive suivante

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{Argsh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R} ;$$

- On rappelle les formules de trigonométrie suivantes

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ,$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b ,$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta ,$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} .$$

- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ est un ensemble de points tels que $a = x_1 < \dots < x_{n+1} = b$, que chaque intervalle $x_{i+1} - x_i$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = \int_a^b f(x) \, dx . \quad (1)$$

Propriétés de quelques matériaux ferromagnétiques

	Aimant au néodyme	Alliage de fer
Aimantation à saturation M_s [A.m^{-1}]	8×10^5	$1,7 \times 10^6$
Energie d'échange $J\mu^2$ [J]	7×10^{-21}	3×10^{-21}
Constante d'anisotropie K [J.m^{-3}]	$1,2 \times 10^6$	5×10^4
Paramètre de maille a [m]	7×10^{-10}	3×10^{-10}

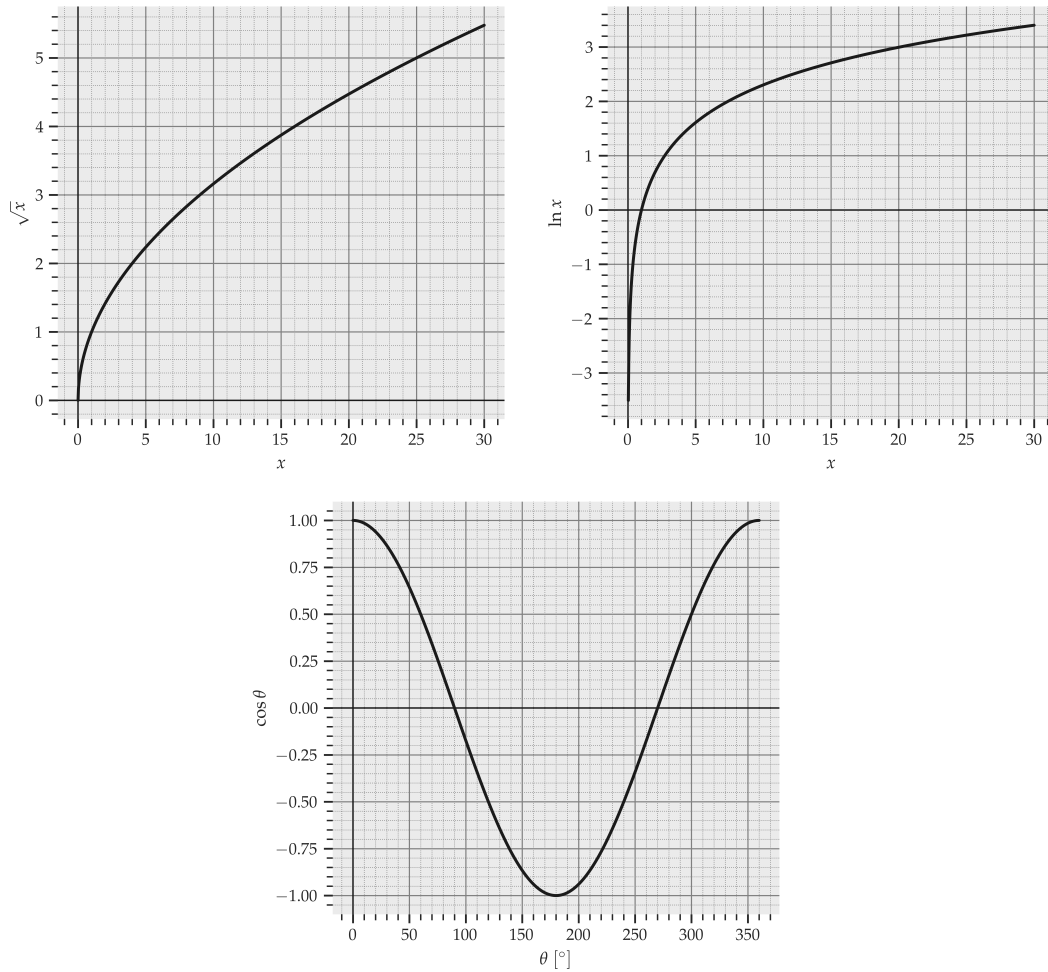


Figure 1: Quelques graphes de fonctions usuelles. **En haut à gauche** : $y = \sqrt{x}$. **En haut à droite** : $y = \ln x$. **En bas** : $y = \cos \theta$. On pourra utiliser ces graphes pour les applications numériques demandées par le sujet.

Première partie : Transition de phase solide-liquide dans les milieux granulaires

On appelle milieu granulaire tout ensemble constitué d'un grand nombre d'éléments solides de petite taille (sable, granulés, neige, ...). Même si chaque élément reste parfaitement solide, un milieu granulaire dans son ensemble peut néanmoins alternativement présenter des propriétés similaires à celles des gaz, des liquides ou des solides, au gré des contraintes physiques, et sans que la nature de ses composants élémentaires ne change. Dans cette partie, nous allons nous pencher sur la transition entre les phases dites « solide » et « liquide » des milieux granulaires, qui se caractérise par un phénomène d'hystérésis bien reconnaissable.

Dans toute cette partie, nous étudierons le mouvement d'un grain unique à la surface du milieu granulaire, comme illustré dans la figure 2. Nous assimilerons ce grain à une sphère $\mathcal{B}$ homogène, de diamètre d , de centre O et de masse m , et la surface du milieu granulaire à une série de bosses sphériques immobiles $\mathcal{S}_n$ en contact les unes avec les autres, également de diamètre d , et dont on notera C_n les centres respectifs. On notera $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, supposée constante et uniforme, et α l'angle d'inclinaison de la surface. Nous supposerons que le centre de $\mathcal{B}$ ne peut se déplacer que dans le plan C_nxy , de sorte que nous ferons du système une description purement bidimensionnelle. Nous supposerons enfin que le contact entre $\mathcal{B}$ et toute bosse $\mathcal{S}_n$ se fait sans friction, de sorte qu'il se traduit par une force de contact $\vec{N}_n$ normale au plan tangent entre les deux sphères, c'est-à-dire portée par l'axe reliant leurs centres respectifs, et s'exerçant au point de contact A_n . On notera N_n la norme de cette force de contact.

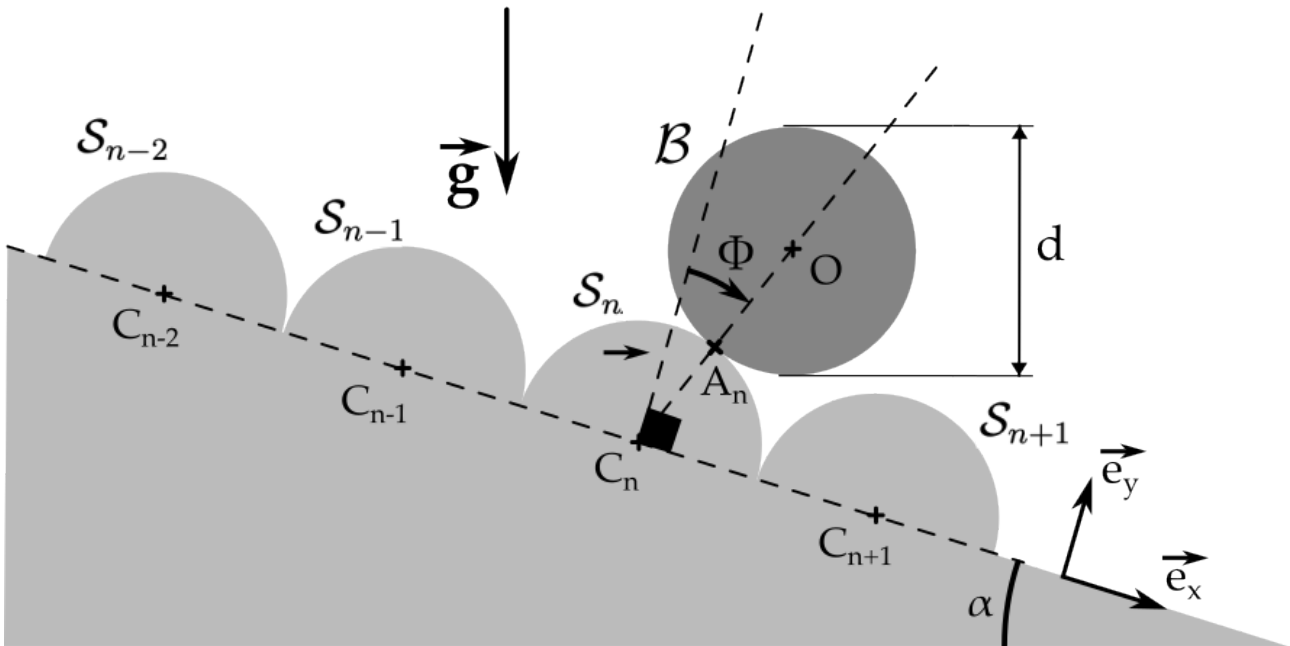


Figure 2: Modèle simplifié du milieu granulaire étudié dans la première partie.

Préliminaires

Le grain $\mathcal{B}$ est initialement au repos dans un creux de la surface, entre les bosses $\mathcal{S}_{n-1}$ et $\mathcal{S}_n$.

1 - À l'aide d'un schéma, faire le bilan des forces s'exerçant sur le grain $\mathcal{B}$. Quelle est la

forme géométrique formée par C_{n-1} , O et C_n ? Rappeler la première loi de Newton, et en déduire deux relations reliant N_{n-1} , N_n , α , m et g , valables tant que $\mathcal{B}$ reste au repos.

2 - En déduire que les normes des deux forces de contact peuvent se mettre sous la forme $N_{n-1} = k \sin \Psi_{n-1}$ et $N_n = k \sin \Psi_n$, en exprimant k , Ψ_{n-1} et Ψ_n en fonction de m , g et α .

3 - En partant d'un angle d'inclinaison α nul, on l'augmente progressivement. À quelle condition le grain $\mathcal{B}$ garde-t-il le contact avec S_{n-1} ? En déduire la valeur de l'angle α pour laquelle ce contact est rompu.

Cet angle, que l'on notera α_s , est appelé « angle critique statique ». Dans les parties I.1 et I.2, on supposera que $\alpha < \alpha_s$.

1. Dynamique d'un grain entre les collisions

On considère maintenant la même situation, sauf qu'on imprime à $\mathcal{B}$ une vitesse initiale dans le sens de la descente, c'est-à-dire suivant $+\vec{e}_x$. On étudie alors son mouvement après qu'il a quitté le contact avec S_{n-1} . On supposera que $\mathcal{B}$ garde à tout instant le contact avec S_n . La situation est précisément celle qui est illustrée dans la figure 2 : pendant cette phase de son mouvement, la position de $\mathcal{B}$ est caractérisée par l'angle ϕ entre l'axe $C_n y$ et la demi-droite reliant C_n à O . Contrairement à la convention usuelle, on considérera que ϕ est positif dans la situation illustrée par la figure 2, et qu'il augmente lorsque le grain descend la pente.

4 - Dans le repère lié à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et ayant pour origine C_n , exprimer la position $\vec{r}$ et la vitesse $\vec{v}$ du centre O du grain $\mathcal{B}$ en fonction de d , ϕ et $\dot{\phi}$. En déduire l'énergie cinétique de $\mathcal{B}$, sachant qu'on peut négliger sa rotation propre.

5 - Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m , plongé dans un champ de pesanteur d'accélération uniforme g orientée vers le bas, en fonction de son altitude z . On admet dans la suite que cette expression reste valable pour un solide de volume fini, à condition que z désigne l'altitude de son centre de gravité.

6 - Montrer que l'altitude du point O par rapport au point C_n vaut $d \cos(\phi + \alpha)$. On note E_p l'énergie potentielle de pesanteur de $\mathcal{B}$, qu'on prendra nulle lorsque $\mathcal{B}$ est au sommet de la bosse S_n , c'est-à-dire à son point le plus haut. Exprimer E_p en fonction de m , g , d , ϕ et α .

7 - On admet que le théorème de l'énergie mécanique est valable pour un solide fini tel que $\mathcal{B}$ de la même manière que pour un point matériel, à condition de prendre également en compte les forces intérieures au solide. Justifier avec soin que l'énergie mécanique de $\mathcal{B}$, qu'on notera E_m , est conservée au cours de son mouvement, tant qu'il n'entre en contact ni avec S_{n-1} , ni avec S_{n+1} . L'analyse conduite ici est-elle valable en cas de contact avec S_{n-1} ou S_{n+1} ? Justifier.

8 - Tracer l'allure de l'énergie potentielle $E_p(\phi)$ du grain $\mathcal{B}$. Que vaut l'angle ϕ lorsque $\mathcal{B}$ est en contact avec S_{n-1} ? Lorsqu'il est en contact avec S_{n+1} ? Lorsqu'il est au sommet de la bosse S_n ? Faire apparaître ces trois angles sur le graphe. À l'aide d'arguments graphiques uniquement, déterminer les trajectoires possibles pour $\mathcal{B}$, sachant qu'il est initialement en contact avec S_{n-1} . À quelle condition $\mathcal{B}$ peut-il entrer en contact avec S_{n+1} ?

9 - On note $\dot{\phi}_0$ la vitesse angulaire de $\mathcal{B}$, supposée positive, lorsqu'elle quitte le contact avec S_{n-1} . Montrer que $\mathcal{B}$ ne peut passer de l'autre côté de S_n , et entrer en contact avec

S_{n+1} , que si $\dot{\phi}_0$ est supérieure à une valeur critique donnée par

$$\dot{\phi}_c = \sqrt{\frac{2g}{d} \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)}. \quad (2)$$

10 - On suppose dans toute la suite que $\dot{\phi}_0 > \dot{\phi}_c$. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique de $\mathcal{B}$ au cours de son mouvement, déterminer une expression de $\dot{\phi}$ valable entre le moment où $\mathcal{B}$ quitte le contact avec S_{n-1} et celui où il entre en contact avec S_{n+1} , en fonction uniquement de ϕ , $\dot{\phi}_0$, $\dot{\phi}_c$, g , d , et α . En déduire qu'au moment où $\mathcal{B}$ entre en contact avec S_{n+1} , la vitesse angulaire vaut

$$\dot{\phi}_f = \sqrt{\dot{\phi}_0^2 + \frac{2g}{d} \sin \alpha}. \quad (3)$$

La résolution exacte de l'équation du mouvement établie à la question 10 est une tâche complexe. Il est en revanche possible de calculer une trajectoire approchée si la vitesse initiale de $\mathcal{B}$ est proche de la vitesse critique établie à la question 9, c'est-à-dire $\dot{\phi}_0 \simeq \dot{\phi}_c$. Dans ce cas, $\mathcal{B}$ met un temps très long à franchir le sommet de S_n , proche duquel il passe le plus clair de son temps. Dans la suite, on notera $\delta\phi$ la position angulaire de $\mathcal{B}$ par rapport au sommet de S_n , de sorte que $\delta\phi = 0$ lorsque l'altitude de $\mathcal{B}$ est maximale.

11 - Montrer que, dans la limite où $\delta\phi \ll 1$, l'équation du mouvement établie à la question 10 peut se mettre sous la forme

$$\tau^2 \delta\dot{\phi}^2 = \delta\phi^2 + \epsilon, \quad (4)$$

où l'on exprimera le temps caractéristique τ et la quantité ϵ en fonction de d , g , $\dot{\phi}_0$ et $\dot{\phi}_c$. Quel est le signe de ϵ ?

12 - En utilisant une séparation des variables dans l'équation du mouvement (4), déterminer sa solution $\delta\phi(t)$, sous une forme explicite et simple faisant intervenir ϵ et τ . On prendra l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où $\mathcal{B}$ est au sommet de S_n , lorsque $\delta\phi = 0$.

13 - Dans la mesure où l'essentiel du temps de trajet de $\mathcal{B}$ est passé dans ce régime $\delta\phi \ll 1$, on suppose que la solution trouvée à la question 12 est valable pendant tout le mouvement (entre le moment où $\mathcal{B}$ rompt le contact avec S_{n-1} , et le moment où il touche S_{n+1}). Exprimer le temps T nécessaire pour parcourir l'ensemble de cette trajectoire, en fonction de α , τ et ϵ .

14 - Simplifier l'expression de T dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, toujours en fonction de α , τ et ϵ . On utilisera la forme logarithmique de la fonction Argsh donnée dans le formulaire, et l'on exploitera le fait que cette fonction est impaire.

15 - Quelle distance sépare les points de départ et d'arrivée du centre de $\mathcal{B}$? En déduire que, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, la vitesse moyenne du grain au cours de cette trajectoire vaut

$$u_m = \frac{\sqrt{gd}}{\ln\left(\frac{4[(\pi/6)^2 - \alpha^2]}{\epsilon}\right)}. \quad (5)$$

Commenter la limite de u_m lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

2. Etude de la phase liquide stationnaire

Nous n'avons pour le moment étudié qu'un élément de la trajectoire d'un grain. On peut distinguer deux cas de figure : soit $\mathcal{B}$ possède suffisamment d'énergie pour continuer à enchaîner de telles trajectoires, entrant en contact successivement avec les bosses S_{n+1} , S_{n+2} , ..., soit il s'arrête dans un creux entre deux bosses. On qualifiera ces deux cas de figure de phase liquide et phase solide du milieu granulaire, respectivement. Dans cette deuxième sous-partie, on se place dans le cas de la phase liquide, et on s'intéresse à l'enchaînement entre les différentes trajectoires successives étudiées dans la sous-partie précédente.

On note $\dot{\phi}_n^{(i)}$ la vitesse angulaire de $\mathcal{B}$ dans son mouvement autour de S_n au moment où le contact avec S_{n-1} est rompu, et $\dot{\phi}_n^{(f)}$ celle de son mouvement autour de S_n au moment où il entre en contact avec S_{n+1} . Ainsi, à chaque début de collision avec une nouvelle bosse S_{n+1} , le grain $\mathcal{B}$ a une vitesse angulaire $\dot{\phi}_n^{(f)}$ autour de S_n , et à chaque fin de collision il a une vitesse angulaire $\dot{\phi}_{n+1}^{(i)}$ autour de S_{n+1} . On note $\vec{u}_n^{(f)}$ et $\vec{u}_{n+1}^{(i)}$ la vitesse de O dans ces deux configurations. Les notations sont résumées dans la figure 3.

16 - Exprimer $\vec{u}_n^{(f)}$ et $\vec{u}_{n+1}^{(i)}$ dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, en fonction de d , $\dot{\phi}_n^{(f)}$ et $\dot{\phi}_{n+1}^{(i)}$.

17 - On admet que, pendant la collision avec S_{n+1} , la composante de la quantité de mouvement de $\mathcal{B}$ tangentielle au plan de contact est conservée. On rappelle également que la quantité de mouvement d'un solide de volume fini se réduit au produit de sa masse par la vitesse de son centre de masse. En déduire une relation de la forme $\dot{\phi}_{n+1}^{(i)} = \beta \dot{\phi}_n^{(f)}$, où l'on spécifiera la valeur du coefficient de proportionnalité β . Commenter cette valeur.

18 - À l'aide de l'équation (3), établir une relation de récurrence entre $\dot{\phi}_n^{(i)}$ et $\dot{\phi}_{n+1}^{(i)}$. Si l'on pose $v_n = \dot{\phi}_n^{(i)2}$, à quel type de suite (v_n) a-t-on affaire ?

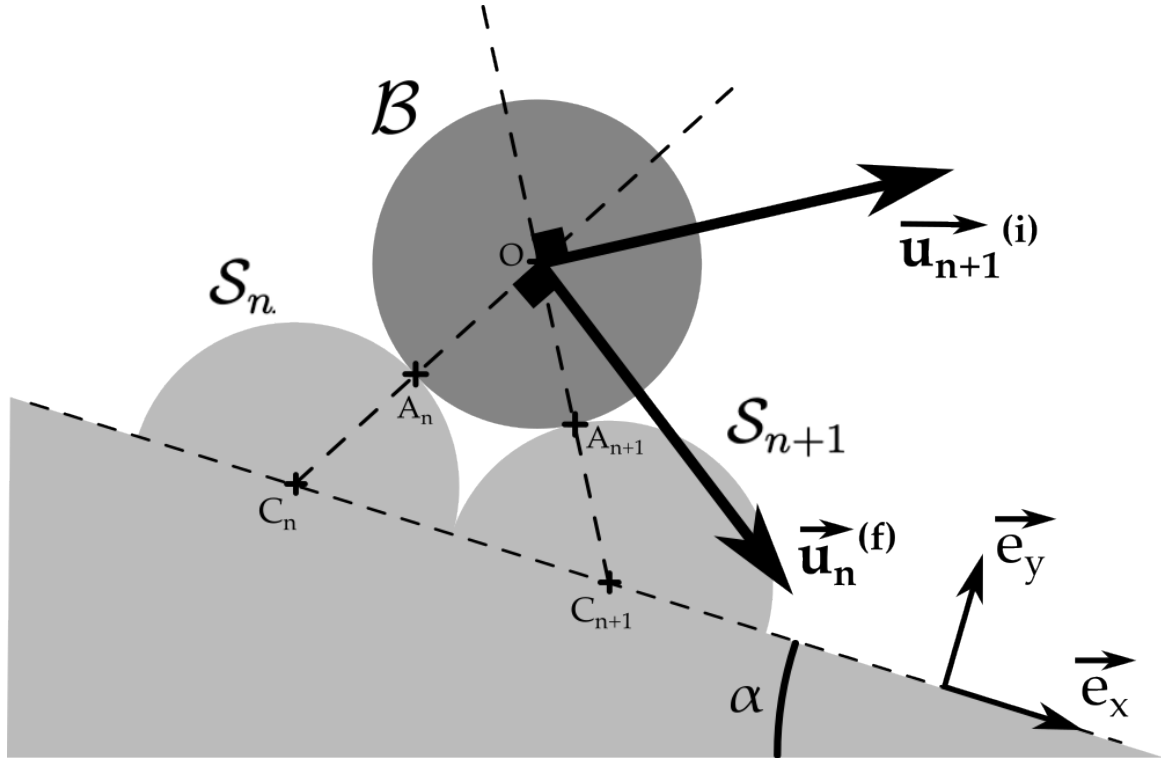


Figure 3: Résumé des notations pour l'étude de la collision entre le grain $\mathcal{B}$ et la bosse S_{n+1} .

19 - Résoudre cette relation de récurrence, et en déduire l'expression de $\dot{\phi}_n^{(i)}$ en fonction uniquement de n et de la vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}_0^{(i)}$ de $\mathcal{B}$ autour de $\mathcal{S}_0$. En déduire que, quelle que soit la vitesse initiale imprimée à $\mathcal{B}$, $\dot{\phi}_n^{(i)}$ tend nécessairement vers une limite stationnaire donnée par

$$\dot{\phi}_\infty^{(i)} = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{3d}}.$$

20 - En tenant compte du résultat de la question 9, établir une condition nécessaire, ne dépendant que de α , pour que la phase granulaire liquide que nous venons de décrire puisse exister. On ne cherchera pas à résoudre explicitement cette condition sur α .

On admet, sans chercher à le montrer, que cette condition est également suffisante, et que pour les angles $\alpha < \alpha_s$ considérés ici, elle est équivalente à $\alpha > \alpha_d$, où $\alpha_d \simeq 10^\circ$ est appelé « angle critique dynamique ». Sous cette condition, on a donc $\alpha_d < \alpha < \alpha_s$. Dans la suite, on note $\delta\alpha = \alpha - \alpha_d$.

21 - Dans ce régime liquide stationnaire, réexprimer la quantité ϵ définie à la question 11 en fonction de d , g , $\dot{\phi}_\infty$ et $\dot{\phi}_c$. Montrer qu'elle peut s'exprimer en fonction de α uniquement, et donner cette expression.

22 - On s'intéresse à la limite $\delta\alpha \rightarrow 0$. Pourquoi cette limite doit-elle être considérée par valeurs positives ? Justifier qu'alors $\epsilon \rightarrow 0$ par valeurs positives. On se trouve alors dans les conditions adoptées pour les questions 11 à 15. En déduire un développement de ϵ à l'ordre 1 en $\delta\alpha$ dans cette limite.

23 - En déduire que, toujours dans cette limite, la vitesse moyenne du grain, donnée par l'équation (5), peut se réécrire

$$u_m = \frac{\sqrt{gd}}{\ln\left(\frac{\alpha_\infty - \alpha_d}{\delta\alpha}\right)}, \quad (6)$$

où l'on exprimera α_∞ en fonction de α_d uniquement. L'application numérique (qu'on ne demande pas) donne $\alpha_\infty = 51,6^\circ$. Commenter cette valeur. Calculer numériquement u_m pour $\alpha = 20^\circ$ et $d = 2$ mm.

3. Transition de phase hystérétique liquide-solide

La relation (6) tient lieu de relation constitutive pour la phase liquide du milieu granulaire, reliant le comportement cinématique (la vitesse moyenne d'écoulement u_m) à l'action extérieure qui en est la cause (l'angle α). On donne dans la figure 4 le graphe de cette relation constitutive. Bien qu'elle ait été obtenue dans la limite asymptotique $\alpha \rightarrow \alpha_d$, on considérera qu'elle est valable pour tout angle $\alpha > \alpha_d$.

Dans cette sous-partie, nous étudions le comportement du milieu granulaire lorsque l'angle d'inclinaison α varie lentement et de manière périodique entre 0 et une valeur maximale $\alpha_{\max}$ telle que $\alpha_s < \alpha_{\max} < \alpha_\infty$. On pourra prendre par exemple $\alpha_{\max} = 40^\circ$. On considérera que $\mathcal{B}$ est initialement au repos lorsque $\alpha = 0$, et que la phase liquide (lorsqu'elle existe) pourra toujours être supposée stationnaire.

24 - Reproduire la figure 4, et y tracer le cycle parcouru par le grain $\mathcal{B}$. On veillera à faire apparaître le sens de parcours du cycle, et les angles critiques statique et dynamique α_s et α_d ,

ainsi que l'angle maximal $\alpha_{\max}$. Dans quelles parties du cycle le milieu granulaire est-il dans sa phase solide ? Dans sa phase liquide ? Pourquoi peut-on parler ici de cycle d'hystérésis ?

25 - À l'aide des résultats obtenus dans la sous-partie I.2, montrer que, dans le régime liquide stationnaire, la variation de la quantité de mouvement du grain $\mathcal{B}$ pendant la collision avec la bosse $\mathcal{S}_{n+1}$ peut s'écrire

$$\Delta \vec{p} = -m\sqrt{2gd \sin \alpha} \vec{n} ,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire pointant du centre O de $\mathcal{B}$ vers le centre C_{n+1} de $\mathcal{S}_{n+1}$.

26 - En déduire que les collisions du grain avec les bosses successives se traduisent par une force effective $\vec{f}_{\text{coll}}$ exercée par $\mathcal{B}$ sur la surface du milieu granulaire, qu'on exprimera en fonction de m , u_m , d , g , α et $\vec{n}$.

27 - On considère une nappe de grains en écoulement liquide, couvrant une aire S de la surface du milieu granulaire, et on note σ la densité surfacique, c'est-à-dire le nombre de grains par unité de surface. Que vaut σ ? En déduire que les collisions de l'ensemble de cette nappe sur la couche inférieure des grains immobiles se traduisent par une force de pression

$$\vec{F}_{\text{coll}} = P_{\text{coll}} S \vec{n} ,$$

où l'on exprimera la pression de collision P_{coll} en fonction de m , g , d , α et u_m .

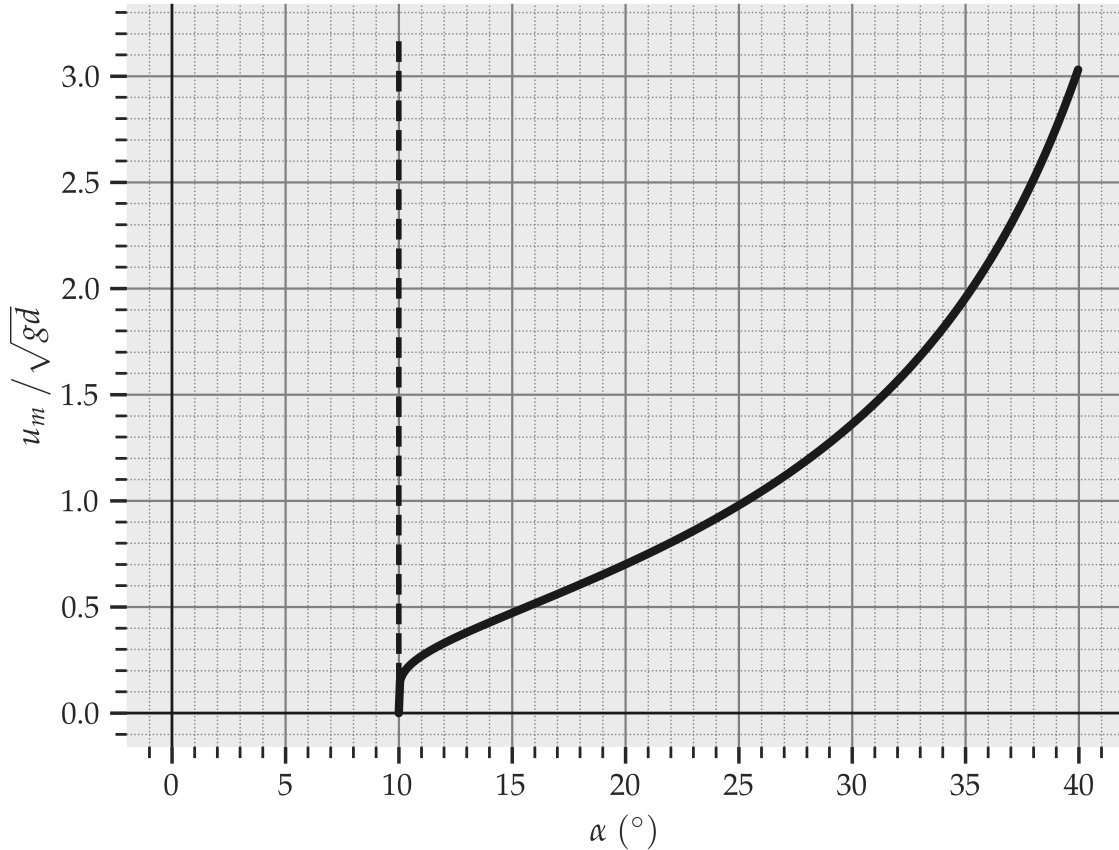


Figure 4: Vitesse d'écoulement moyenne u_m de la phase granulaire liquide, en fonction de l'angle d'inclinaison α . La ligne verticale en pointillés marque l'angle critique dynamique α_d .

28 - Calculer numériquement P_{coll} pour $\alpha = 20^\circ$, $d = 2 \text{ mm}$ et $m = 10 \text{ mg}$ (on reprendra la valeur de u_m calculée à la question **23**). La comparer à la pression atmosphérique. En quoi cette force de pression de collision diffère-t-elle qualitativement du cas de la pression hydrostatique ?

29 - Rappeler les deux lois de Coulomb régissant les forces de frottement solide. Quels parallèles pouvez-vous faire avec la situation étudiée dans cette partie ?

*** Fin de la première partie ***

Deuxième partie : Hystérèse des matériaux ferromagnétiques

De nombreux matériaux sont capables de s'aimanter – c'est-à-dire d'acquérir un moment magnétique non nul – lorsqu'ils sont plongés dans un champ magnétique extérieur. Certains, qualifiés de « ferromagnétiques », sont capables d'acquérir une forte aimantation même en l'absence de champ magnétique extérieur. Dans ces matériaux, chaque atome possède un moment magnétique non nul. En s'orientant en bloc dans une même direction, les moments magnétiques atomiques peuvent s'additionner pour fournir au matériau un moment magnétique macroscopique.

Dans toute cette partie, nous considérerons un ferromagnétique cristallin, dans lequel les atomes sont fixés sur des sites agencés selon un maillage régulier. Nous supposons que chaque atome porte un moment magnétique $\vec{\mu}$ dont la norme μ est la même pour tous les atomes. Ainsi, l'état magnétique de chaque atome peut être décrit simplement par l'orientation de son moment magnétique. L'état magnétique macroscopique du cristal sera, lui, décrit par son aimantation $\vec{M}$, qui est définie localement comme le moment magnétique porté par les atomes par unité de volume. Le moment magnétique porté par un volume infinitésimal $d^3 \vec{x}$ centré sur $\vec{x}$ vaut alors par définition $\vec{M}(\vec{x}) d^3 \vec{x}$, et l'aimantation totale du cristal s'écrit

$$\vec{M}_{\text{tot}} = \frac{1}{V} \iiint \vec{M}(\vec{x}) d^3 \vec{x} , \quad (7)$$

où l'intégrale porte sur tout le volume V du cristal. Si l'aimantation est uniforme, on l'écrira simplement $\vec{M}$, en laissant de côté la notation "tot".

Préliminaires

30 - La norme μ du moment magnétique porté par un atome est communément mesurée en multiples du magnéton de Bohr μ_B . Rappeler l'expression de μ_B en fonction des constantes fondamentales e (charge électrique élémentaire), $\hbar$ (constante de Planck réduite) et m_e (masse de l'électron), ainsi que sa valeur numérique et son unité.

31 - Lorsqu'un moment magnétique $\vec{\mu}$ est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ (dont on notera la norme B_0), il subit de la part de ce dernier une action dérivant d'une énergie potentielle $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$. Exprimer cette énergie potentielle en fonction de μ , B_0 , et de l'angle ψ entre $\vec{\mu}$ et $\vec{B}_0$. Quelles sont ses positions d'équilibre ? Commenter leur stabilité.

En réalité, l'orientation des moments magnétiques est également affectée par deux autres effets. D'une part, l'agitation thermique tend à rendre aléatoire l'orientation des différents moments magnétiques. Dans toute cette partie, on négligera cet effet en se plaçant à basse température. D'autre part, les moments magnétiques d'atomes voisins peuvent interagir entre eux, à travers un effet d'origine quantique. On admettra que l'interaction entre les moments magnétiques $\vec{\mu}_1$ et $\vec{\mu}_2$ de deux atomes voisins dérive d'une énergie potentielle dite « d'échange » $E_p^{(ech)}$ qui s'écrit

$$E_p^{(ech)} = -J \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 , \quad (8)$$

où J est une constante appelée « intégrale d'échange ». On supposera $J > 0$, de sorte que cette interaction a tendance à faire s'aligner les moments magnétiques voisins les uns avec les autres. Ainsi, **en l'absence d'autres interactions**, tous les moments magnétiques des atomes sont alignés les uns avec les autres, et ne peuvent se réorienter qu'en bloc : le cristal est dans ce cas qualifié de « mono-domaine ».

32 - Justifier qu'il s'agit de la configuration pour laquelle la norme M de l'aimantation du cristal est maximale, et que celle-ci est uniforme. Cette valeur maximale de M , notée M_s , est appelée *aimantation à saturation*. Exprimer M_s en fonction du moment magnétique μ porté par chaque atome, du nombre d'atomes N constituant le cristal, et de son volume V .

33 - On plonge ce cristal dans un champ magnétique extérieur orienté selon un axe Oz , porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_z$, de sorte que $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On note M_z la composante de l'aimantation $\vec{M}$ du cristal selon $\vec{e}_z$. Lorsque le cristal est dans sa configuration d'équilibre stable, exprimer M_z en fonction de μ , N et V , en distinguant deux cas suivant la valeur de B_0 . Tracer l'allure de $M_z(B_0)$. Si B_0 augmente et diminue cycliquement entre deux valeurs $-B_{\max}$ et $+B_{\max}$, l'aimantation du cristal subit-elle un cycle d'hystérésis ? Justifier.

1. Hystérésis due à l'anisotropie du cristal

Bien souvent, la géométrie du réseau cristallin a un effet sur l'orientation des moments magnétiques atomiques, et donc sur l'aimantation $\vec{M}$ du cristal. Dans cette sous-partie, nous allons voir comment cet effet d'anisotropie peut entraîner le caractère hystérétique de la réponse du cristal à un champ magnétique extérieur.

Dans toute cette sous-partie, on admettra que les moments magnétiques atomiques restent alignés les uns avec les autres, de sorte qu'on pourra décrire l'état magnétique du cristal par la seule orientation de son aimantation uniforme $\vec{M}$, dont la norme vaut toujours M_s . L'anisotropie du cristal prend la forme d'axes privilégiés le long desquels il est plus facile à son aimantation de s'aligner. Nous considérerons dans la suite qu'il n'existe qu'une seule telle direction, portée par le vecteur unitaire $\vec{n}$. On admettra que l'énergie potentielle d'anisotropie du cristal s'écrit

$$E_p^{(an)} = KV \sin^2 \theta, \quad (9)$$

où θ est l'angle entre la direction de l'aimantation $\vec{M}$ et le vecteur $\vec{n}$, et $K > 0$ est la constante d'anisotropie du cristal (qui a la dimension d'une énergie par unité de volume).

Dans toute cette sous-partie, le champ magnétique extérieur, dans lequel est plongé le cristal, est astreint à varier le long d'un axe fixe, porté par un vecteur unitaire $\vec{n}_B$. On écrira donc $\vec{B}_0 = B_0 \vec{n}_B$, et l'on notera θ_B l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{n}_B$. Dans ces conditions, on admettra que $\vec{M}$ reste dans le plan formé par $\vec{n}$ et $\vec{n}_B$, et le seul degré de liberté du cristal est l'angle θ . On se réfèrera à la figure 5 pour un résumé de ces notations.

34 - En l'absence de champ magnétique extérieur ($B_0 = 0$), quelles sont les positions d'équilibre du cristal ? Commenter leur stabilité.

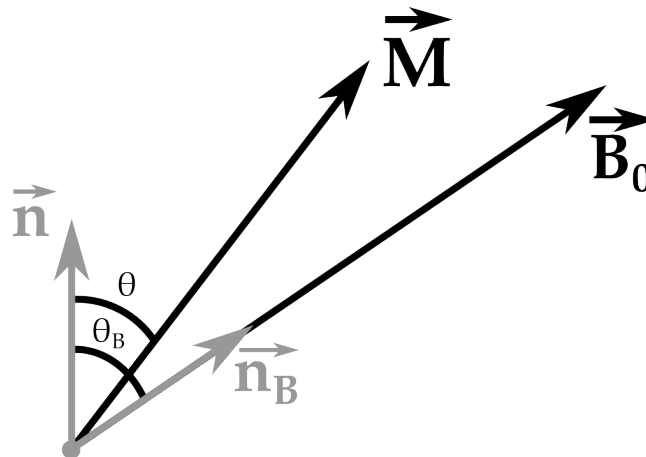


Figure 5: Notations adoptées pour l'étude de l'aimantation du cristal anisotrope.

35 - En présence d'un champ magnétique extérieur, montrer que l'énergie potentielle du cristal par unité de volume vaut

$$e_p^{(tot)} = K \sin^2 \theta - M_s B_0 \cos(\theta - \theta_B) .$$

On considère d'abord (et jusqu'à la question **47** incluse) le cas où le champ magnétique est aligné sur l'axe facile du cristal (c'est-à-dire $\theta_B = 0$).

36 - Montrer que $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont des positions d'équilibre dans tous les cas de figure, mais qu'il en existe également deux autres (donc quatre en tout) si $|B_0|$ est inférieure à une valeur critique B_c , qu'on exprimera en fonction de M_s et K . Expliciter ces positions d'équilibre supplémentaires en fonction de B_0 , M_s et K . Commenter la stabilité de toutes ces positions d'équilibre. Tracer ces différentes positions d'équilibre en fonction du rapport B_0/B_c , en prenant soin de faire apparaître leur caractère stable ou instable.

37 - À partir de l'analyse conduite à la question précédente, tracer l'allure du profil d'énergie potentielle volumique $e_p^{(tot)}(\theta)$ pour **a)** $B_0 < -B_c$, **b)** $-B_c < B_0 < B_c$, et **c)** $B_0 > B_c$.

38 - Supposons que le champ magnétique vaille initialement $B_0 = -B_{\max} < -B_c$. On fait alors progressivement croître B_0 jusqu'à $+B_{\max} > B_c$, suffisamment lentement pour que le cristal puisse à tout instant être considéré comme étant à l'équilibre. Décrire l'évolution de l'orientation θ de l'aimantation du cristal lors de cette phase de croissance.

39 - Une fois la valeur $B_{\max}$ atteinte, on fait décroître tout aussi progressivement le champ jusqu'à $-B_{\max}$. Décrire l'évolution de l'orientation θ de l'aimantation du cristal lors de cette phase de décroissance.

40 - On mesure l'état magnétique du cristal par son aimantation mesurée sur l'axe du champ magnétique extérieur, c'est-à-dire $M = M_s \cos \theta$. Tracer M/M_s en fonction de B_0/B_c lors d'un cycle entier constitué de la phase de croissance décrite à la question **38**, suivie de la phase de décroissance décrite à la question **39**. On spécifiera le sens de parcours de ce cycle. Commenter. Quelles phases du cycle peuvent-elles être qualifiées de réversibles ? D'irréversibles ? Justifier.

Nous allons maintenant montrer que la présence de phases irréversibles entraîne des pertes d'énergie dans le matériau. Considérons pour cela le dispositif décrit à la figure 6, constitué d'un barreau ferromagnétique de longueur L et de section S (assimilable au cristal étudié jusqu'à présent), autour duquel on a enroulé un bobinage de N spires conductrices. On branche les deux bornes de ce bobinage à un générateur de tension u_G . On note i l'intensité du courant électrique dans le circuit, dont on négligera la résistance. Ce courant induit un champ magnétique dans le barreau, dont on notera ϕ le flux à travers l'ensemble des N spires.

41 - Rappeler la définition de la force électromotrice ϵ induite par un champ magnétique sur un circuit, et rappeler la loi de Faraday reliant ϵ au flux magnétique.

42 - On rappelle que l'énergie électrique fournie par le générateur entre deux instants t_i et t_f s'écrit

$$E_G = \int_{t_i}^{t_f} u_G(t) i(t) dt .$$

À partir de la question précédente, exprimer E_G en fonction de $i(t)$ et $\phi(t)$. On sera particulièrement attentif au signe de cette expression.

Il convient, dans la suite, de faire la distinction entre le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ que nous avons introduit depuis le début, qui correspond au champ créé par les courants électriques extérieurs au barreau, et le champ effectif $\mu_0 \vec{M}$ induit par les courants microscopiques associés aux moments magnétiques des atomes du barreau. Le champ magnétique total, que l'on notera $\vec{B}$, est la somme de ces deux contributions, de sorte que

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} .$$

43 - On assimile le bobinage de N spires à un solénoïde infini. On notera $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de son axe, comme indiqué sur la figure 6. Rappel, sans en refaire le calcul, l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini à l'intérieur du bobinage et à l'extérieur, en fonction notamment de l'intensité $i(t)$ circulant dans les spires. Du point de vue du barreau ferromagnétique, ce champ magnétique correspond-il à $\vec{B}$, $\vec{B}_0$, ou $\mu_0 \vec{M}$? Justifier.

44 - Exprimer le flux ϕ du champ magnétique à travers le circuit bobiné en fonction du champ magnétique (qu'on supposera uniforme) à l'intérieur du barreau, ainsi que des autres données du problème. Le champ magnétique qui apparaît dans cette expression est-il $\vec{B}$, $\vec{B}_0$, ou $\mu_0 \vec{M}$? Justifier.

45 - En déduire que l'énergie fournie par le générateur entre les instants t_i et t_f (dont on supposera qu'elle est intégralement transférée au barreau) peut s'écrire, par unité de volume du matériau du barreau

$$e_{\text{perte}} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} dt . \quad (10)$$

On admettra que ce résultat est valable dans le cas général, quelle que soit l'origine du champ extérieur $\vec{B}_0$.

46 - On rappelle qu'on mesure l'aimantation $\vec{M}$ du cristal dans la direction du champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$. Supposons que les instants initial t_i et final t_f intervenant dans l'équation (10) correspondent au début et à la fin d'un cycle tel que celui décrit à la question

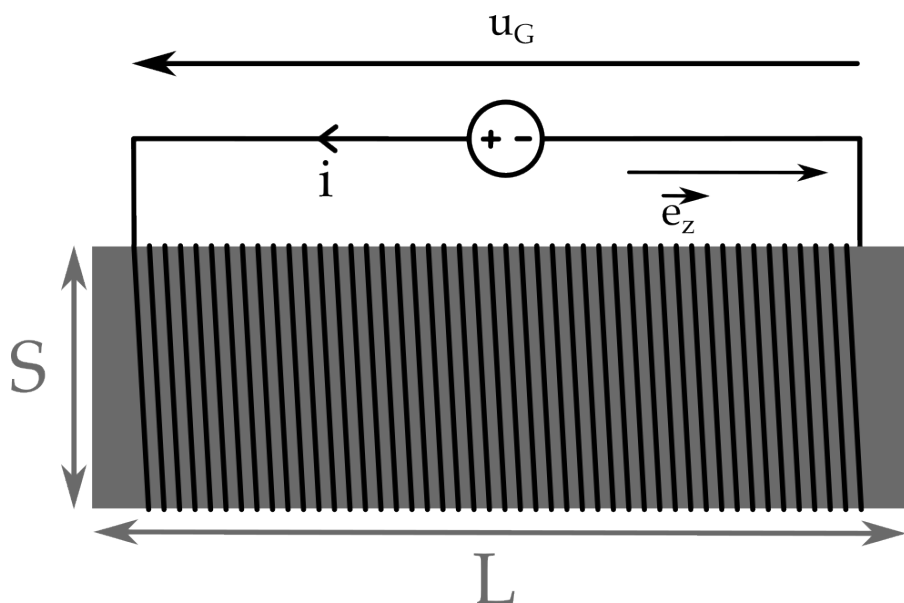


Figure 6: Dispositif expérimental pour la mise en évidence des pertes d'énergie dues aux phases irréversibles du cycle d'aimantation.

40, de sorte qu'après avoir successivement crû puis décroît, $B_0(t_i) = B_0(t_f)$ et $M(t_i) = M(t_f)$. Montrer, en le justifiant avec soin, que l'énergie perdue dans le barreau par unité de volume pendant un tel cycle est égale à l'aire entourée par le cycle lorsqu'il est tracé dans un diagramme (M, B_0) , *parcouru dans un sens qu'on n'oubliera pas de spécifier*. Exprimer l'aire du cycle de la question **40** en fonction de K .

47 - Les matériaux ferromagnétiques sont utilisés dans les noyaux des transformateurs qui équipent, par exemple, les chargeurs d'ordinateurs portables. On suppose que le noyau du transformateur, assimilé à un parallélépipède de côtés 10 cm, 1 cm et 1 cm, est soumis au cycle décrit dans la question **40**, à la fréquence $f = 50$ Hz du réseau électrique. Exprimer la puissance électrique perdue par hystérésis P_{perte} en fonction de K , V et f . Faire l'application numérique dans le cas d'un aimant néodyme et d'un alliage de fer, respectivement. Quel matériau est-il préférable d'utiliser pour cette application ? Comparer à la puissance électrique typique consommée par un ordinateur (environ une centaine de Watts), et commenter.

Nous reprenons maintenant le système illustré par la figure 5, avec cette fois-ci un champ magnétique extérieur B_0 orienté arbitrairement par rapport à l'axe facile du cristal (c'est-à-dire $\theta_B \neq 0$). Dans toute la suite de cette sous-partie on exclura non seulement les cas $\theta_B = 0$ et π (déjà traités), mais également les cas $\theta_B = \pm\pi/2$.

48 - Montrer que, pour qu'un angle θ_{eq} soit position d'équilibre du cristal, il faut que le champ magnétique extérieur B_0 ait la valeur suivante

$$B_0(\theta_{\text{eq}}) = -\frac{K}{M_s} \frac{\sin 2\theta_{\text{eq}}}{\sin(\theta_{\text{eq}} - \theta_B)} , \quad (11)$$

et montrer que cette position d'équilibre est stable si et seulement si

$$\cos 2\theta_{\text{eq}} > \frac{\sin 2\theta_{\text{eq}}}{2 \tan(\theta_{\text{eq}} - \theta_B)} .$$

La figure 7 montre la courbe $M_s B_0(\theta_{\text{eq}})/K$ donnée par l'équation (11) dans le cas $\theta_B = \pi/4$, où les branches en traits pleins correspondent aux positions stables et les branches en pointillés aux positions instables.

49 - On fait parcourir au champ magnétique extérieur B_0 le même cycle que celui décrit dans les questions **38** et **39**, avec $B_{\text{max}} = 3K/M_s$. Reproduire la figure 7 en y ajoutant le cycle décrit par l'angle θ_{eq} . En déduire qu'il existe une valeur critique $B_c > 0$ du champ extérieur telle que θ_{eq} (c'est-à-dire l'aimantation du cristal) subit une discontinuité lorsque $B_0 = \pm B_c$. Faire clairement apparaître ces valeurs critiques sur la figure, ainsi que les angles critiques θ_c^+ et θ_c^- pour lesquels cette discontinuité a lieu.

50 - En explicitant la condition sur $B_0(\theta_{\text{eq}})$ qui permet de déterminer les angles critiques θ_c^+ et θ_c^- , et à l'aide des relations trigonométriques rappelées dans le formulaire, montrer que ceux-ci sont reliés à θ_B par

$$\tan^3 \theta_c^+ = \tan^3 \theta_c^- = -\tan \theta_B .$$

Que valent θ_c^+ et θ_c^- pour $\theta_B = \pi/4$? Que vaut le champ critique B_c dans ce cas ?

51 - On rappelle qu'on mesure l'aimantation du cristal le long de l'axe du champ magnétique extérieur, c'est-à-dire $M = M_s \cos(\theta_{\text{eq}} - \theta_B)$. À l'aide d'une lecture graphique de la figure 7, déterminer la valeur approximative de θ_{eq} a) juste avant que B_0 croisse au-dessus de $+B_c$,

b) juste après que B_0 croisse au-dessus de $+B_c$, **c)** juste avant que B_0 décroisse en-dessous de $-B_c$, **d)** juste après que B_0 décroisse en-dessous de $-B_c$, **e)** pour $B_0 = +B_{\max}$, et **f)** pour $B_0 = -B_{\max}$. À l'aide de la figure 7, donner une estimation de M/M_s pour ces six étapes clés du cycle, puis tracer le cycle décrit par l'aimantation du cristal dans le plan $(M/M_s, B_0/B_c)$ pour $\theta_B = \pi/4$. Les pertes par hystérésis sont-elles supérieures ou inférieures au cas $\theta_B = 0$?

Une des principales propriétés des matériaux ferromagnétiques est leur « champ coercitif », c'est-à-dire l'amplitude du champ magnétique extérieur dans lequel il faut plonger le matériau initialement aimanté pour pouvoir ramener son aimantation à zéro.

52 - Toujours dans le cas $\theta_B = \pi/4$, exprimer le champ coercitif du cristal en fonction de M_s et K . Calculer sa valeur numérique dans le cas de l'aimant au néodyme et dans le cas de l'alliage de fer. Commenter.

53 - C'est la grande coercivité des aimants fabriqués à partir de terres rares, comme le néodyme, qui confère à ces dernières leur grande valeur marchande. Donner, en les justifiant, au moins un exemple d'application pour laquelle cette propriété est un avantage, et au moins un autre pour laquelle c'est un inconvénient.

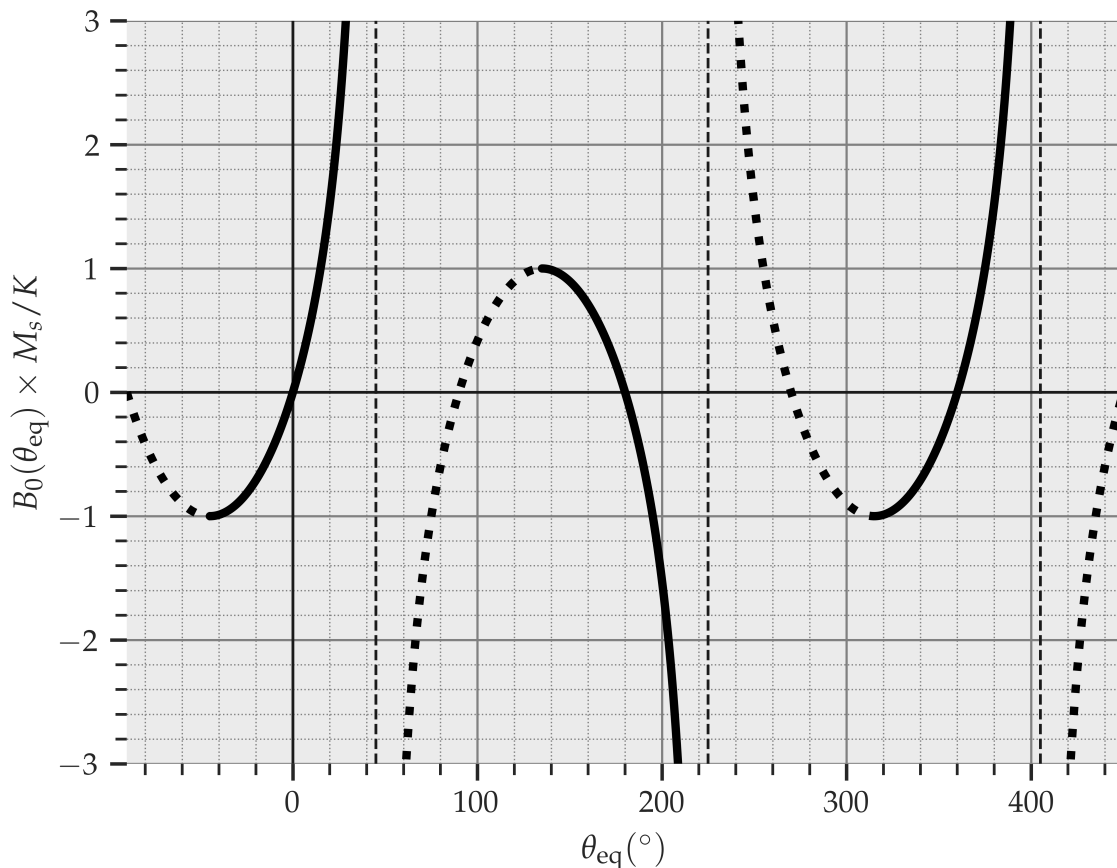


Figure 7: Équilibre et stabilité du cristal anisotrope dans un champ magnétique extérieur, pour $\theta_B = \pi/4$. Les parties de la courbe représentées en traits pleins correspondent aux positions d'équilibre stables, et les parties en pointillés aux positions d'équilibre instables. Les lignes verticales en tirets marquent les angles θ_B et $\theta_B + \pi$, pour lesquels la fonction $B_0(\theta_{eq})$ - équation (11) - n'est pas définie.

2. Hystérésis due aux impuretés cristallines

Jusqu'à présent, nous avons délibérément mis de côté l'interaction magnétostatique entre atomes, qui est différente de l'interaction d'échange introduite dans le préambule de la partie II. En effet, chaque atome portant un moment magnétique non-nul produit son propre champ magnétique, qui a lui-même une action sur chacun des autres moments magnétiques. L'énergie magnétostatique qui découle de cette interaction peut jouer un rôle crucial dans le cas d'un cristal macroscopique, et on admettra que dans les conditions considérées ici, elle peut s'écrire

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} N_d V \mu_0 M_{\text{tot}}^2, \quad (12)$$

où M_{tot} est l'aimantation totale du cristal, V son volume, et N_d un facteur sans dimension, proche de l'unité, et ne dépendant que de la géométrie de l'échantillon.

Pour minimiser cette énergie magnétostatique (c'est-à-dire minimiser l'aimantation totale), le cristal aura tendance à favoriser une configuration constituée de plusieurs sous-régions (appelées domaines de Weiss) portant chacune sa propre aimantation uniforme, séparées par des parois bien définies, dites parois de Bloch. Mais les parois de Bloch ont un coût énergétique (énergie d'anisotropie et énergie d'échange), de sorte que l'état magnétique du cristal est le résultat d'une compétition entre ces différentes formes d'énergie, auxquelles il faut ajouter, le cas échéant, l'énergie potentielle d'interaction avec un champ magnétique extérieur.

Dans toute la suite, on considère un échantillon ferromagnétique à structure cristalline cubique, de paramètre de maille a , et constitué de deux domaines de Weiss séparés par une unique paroi de Bloch, tel que schématisé sur la figure 8. L'échantillon a la forme d'un parallélépipède de section S dans le plan parallèle à Oyz , et de longueur L suivant l'axe Ox . L'origine O du repère est au centre de la paroi de Bloch, laquelle est située entre $x = -\delta/2$ et $x = \delta/2$. Tous les atomes ont un moment magnétique $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_y$ dans le domaine $x < -\delta/2$, et $\vec{\mu} = -\mu \vec{e}_y$ dans le domaine $x > \delta/2$. À l'intérieur de la paroi, l'orientation des moments magnétiques évolue progressivement avec l'abscisse x , de $+\mu \vec{e}_y$ à $-\mu \vec{e}_y$, tout en restant dans le plan Oxy , de sorte que si l'on note $n = \delta/a$ le nombre de couches d'atomes internes à la paroi, l'angle entre les moments magnétiques de deux couches consécutives est égal à $\Delta\varphi = \pi/n$.

54 - On rappelle que l'interaction d'échange est limitée à des atomes voisins dans le réseau cristallin, et qu'elle dérive de l'énergie potentielle donnée par l'équation (8). Montrer que l'énergie potentielle d'échange $E_p^{(ech)}$ contenue dans l'ensemble du cristal se met sous la forme

$$E_p^{(ech)} = E_p^{(0)} + S\gamma^{(ech)},$$

avec

$$E_p^{(0)} = -\frac{3J\mu^2 SL}{a^3},$$

$$\gamma^{(ech)} = \frac{J\mu^2 \delta}{a^3} \left[1 - \cos\left(\frac{a\pi}{\delta}\right) \right].$$

Que représentent $E_p^{(0)}$ et $\gamma^{(ech)}$, respectivement ?

55 - Donner une expression simplifiée de $\gamma^{(ech)}$ dans la limite $n \gg 1$. L'interaction d'échange a-t-elle tendance à épaissir ou amincir la paroi ? Commenter.

56 - On suppose que le cristal possède un unique axe facile, comme décrit au début de la section II.1, et que celui-ci est parallèle à l'axe Oy de la figure 8. On rappelle que cela se traduit pour le cristal par une énergie potentielle d'anisotropie donnée par l'équation (9).

Exprimer l'énergie potentielle d'anisotropie par unité de surface contenue dans la paroi, que l'on notera $\gamma^{(an)}$, sous la forme d'une somme discrète sur les couches d'atomes constituant la paroi, c'est-à-dire pour $i = 1$ à n .

57 - En utilisant l'équation (1) donnée dans le formulaire, déterminer une expression simplifiée pour $\gamma^{(an)}$ valable pour $n \rightarrow +\infty$, en fonction de K et δ . L'anisotropie du cristal a-t-elle tendance à épaissir ou amincir la paroi ? Commenter, en regard de la question 55.

58 - Dans la suite, on notera γ l'énergie surfacique totale de la paroi. Montrer que, dans la limite $n \gg 1$, il existe une valeur de son épaisseur δ qui minimise cette énergie surfacique. Exprimer δ et γ dans cette configuration d'énergie minimale, en fonction de J , K , μ et a . Calculer numériquement δ et γ pour un aimant au néodyme, puis pour un alliage de fer. Au vu des valeurs trouvées pour δ , la limite dans laquelle nous nous sommes placés est-elle vérifiée ?

59 - À l'aide d'un raisonnement portant sur des ordres de grandeur, montrer qu'il existe une taille critique typique R_c , qu'on exprimera en fonction de γ , M_s et N_d , telle qu'un échantillon de taille inférieure adoptera spontanément une configuration mono-domaine (similaire à celle étudiée dans la partie II.1), tandis qu'un échantillon de taille supérieure favorisera une configuration constituée de plusieurs domaines de Weiss. Calculer l'ordre de grandeur de R_c pour l'aimant au néodyme et pour l'alliage de fer (on pourra prendre $N_d = 1/3$). Commenter quant à la pertinence de la notion de paroi de Bloch dans les deux cas.

Dans toute la suite, on se placera dans le cas d'un cristal de taille bien supérieure à la taille

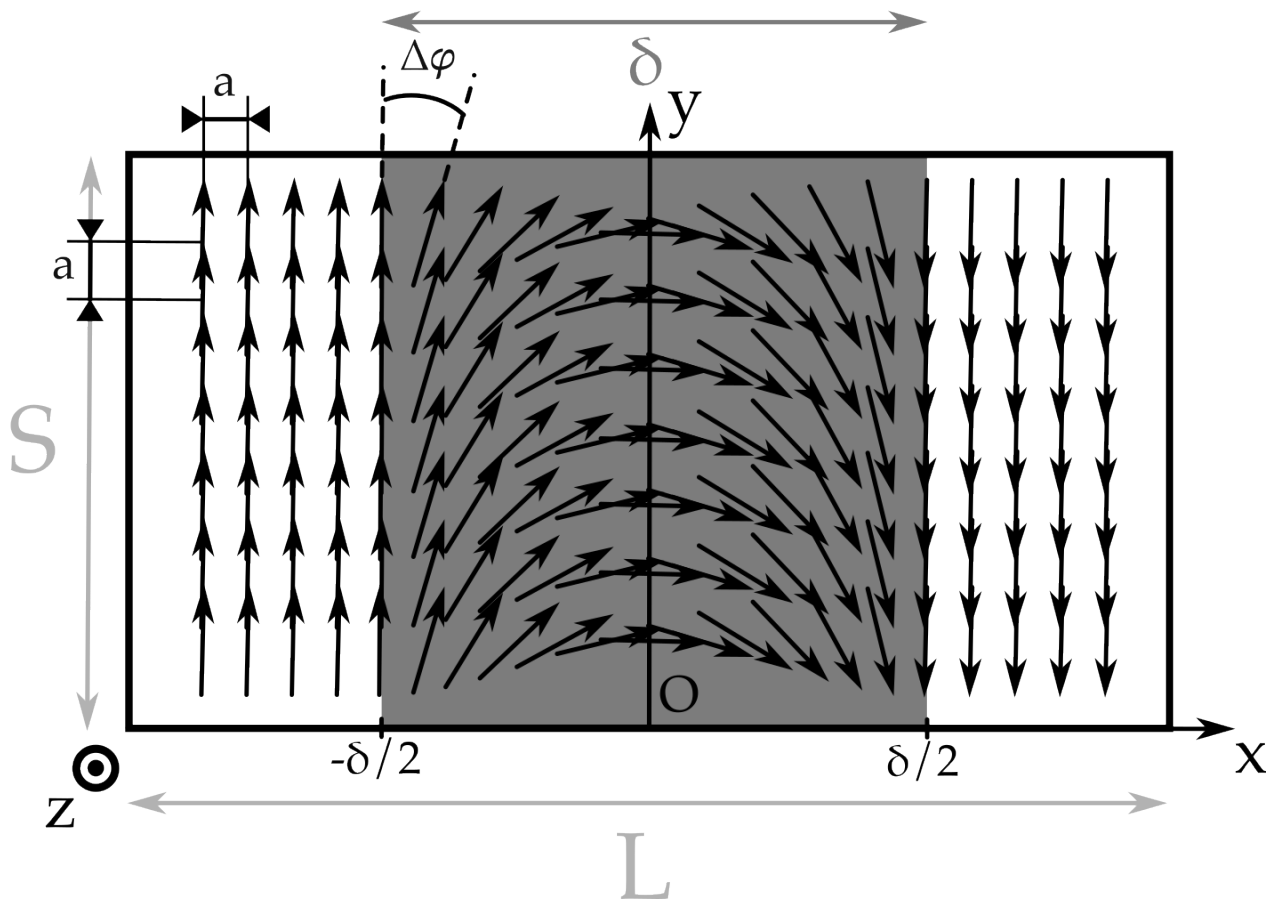


Figure 8: Modèle simplifié d'un cristal multi-domaines. La partie centrale (en gris) correspond à la paroi de Bloch, tandis que les parties latérales (en blanc) représentent les deux domaines de Weiss.

critique R_c introduite dans la question 59. Lorsque le cristal est plongé dans un champ magnétique extérieur, des domaines de Weiss entiers peuvent se réorienter en bloc pour s'aligner sur le champ magnétique, mais des parois de Bloch peuvent aussi se déplacer progressivement, de sorte que les domaines dont l'aimantation est alignée sur le champ magnétique grossissent au détriment des autres. Nous considérons ici ce second processus.

Nous nous proposons d'étudier le mouvement de la paroi de Bloch décrite sur la figure 8 sous l'effet d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$. Pour simplifier, on admet que la paroi reste plane, parallèle au plan Oyz , loin des bords du cristal, et d'épaisseur δ négligeable devant la taille du cristal, de sorte que la somme des épaisseurs des deux domaines de Weiss est assimilée à L . On admet également que l'orientation de l'aimantation dans les deux domaines de Weiss ne change pas, de sorte qu'elle vaut $+M_s \vec{e}_y$ à gauche, et $-M_s \vec{e}_y$ à droite. On note x_p la position du centre de la paroi, de sorte que $x_p = 0$ lorsque les deux domaines de Weiss ont une taille identique.

60 - Exprimer l'aimantation totale $\vec{M}_{\text{tot}}$ du cristal en fonction de M_s , x_p , L et $\vec{e}_y$. En déduire l'énergie magnétostatique de l'échantillon, en fonction de N_d , M_s , S , L et x_p .

61 - En présence du champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$, l'échantillon possède également une énergie potentielle d'interaction avec ce champ. L'exprimer en fonction de B_0 , S , M_s et x_p . En déduire l'énergie totale E_{tot} du cristal dans son ensemble (c'est-à-dire des deux domaines de Weiss et de la paroi de Bloch). On prendra l'origine des énergies de sorte que la quantité $E_p^{(0)}$ dans l'énergie d'échange calculée à la question 54 soit nulle.

62 - Sachant que l'énergie surfacique γ est uniforme, déterminer la position d'équilibre de la paroi de Bloch. Commenter sa stabilité. En déduire l'aimantation totale $\vec{M}_{\text{tot}}$ du cristal à l'équilibre, en fonction de N_d et de l'amplitude B_0 du champ extérieur. Tant que l'on fait varier B_0 lentement, ce processus d'aimantation est-il réversible ? Justifier.

En réalité, la présence d'impuretés, d'inhomogénéités, d'inclusions et de défauts dans le cristal rend l'énergie surfacique γ de la paroi de Bloch non uniforme : on la notera $\gamma(x_p, y, z)$ dans la suite. Ce sont ces impuretés qui sont à l'origine du phénomène d'hystérésis observé dans tous les cristaux ferromagnétiques de taille macroscopique.

63 - Reprendre, avec cette nouvelle hypothèse, le raisonnement des questions 61 et 62, et écrire la nouvelle condition d'équilibre et de stabilité de la paroi de Bloch sous la forme suivante

$$M_s B_0 - \frac{1}{S} \frac{dW}{dx_p} = 0 ,$$

$$\frac{d^2 W}{dx_p^2} > 0 ,$$

où l'on explicitera la fonction $W(x_p)$ en fonction des données du problème, et notamment de $\gamma(x_p, y, z)$. À quelle grandeur physique la quantité $M_s B_0$ est-elle homogène ? Que représente la première équation ci-dessus ?

Dans la suite, on considérera que $W(x_p)$ prend la forme d'une succession d'arcs de paraboles, ce qui revient à dire que dW/dx_p prend la forme d'une fonction affine par morceaux et continue, telle que représentée sur la figure 9. Chaque morceau a la même longueur $\ell = 1 \text{ cm}$. Initialement, le champ magnétique extérieur B_0 est nul, et $x_p = 0$. On fait ensuite varier B_0 cycliquement, d'abord en le faisant croître jusqu'à une valeur $+B_{\text{max}}$, puis en le faisant décroître jusqu'à $-B_{\text{max}}$, et ainsi de suite. On supposera que les variations de B_0 sont suffisamment lentes pour que la

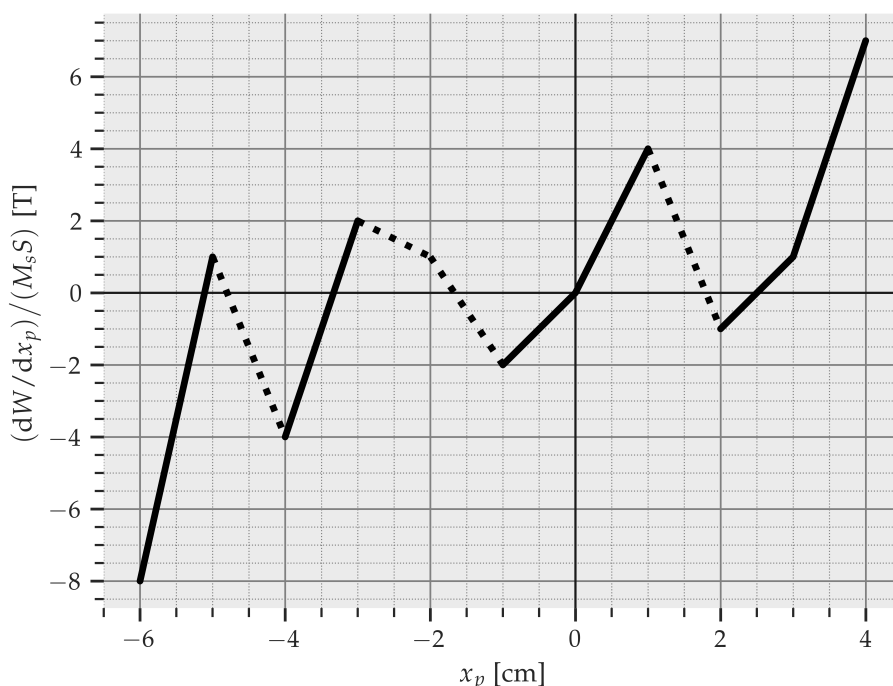


Figure 9: Dérivée par rapport à x_p de la fonction W définie à la question 63, divisée par la constante $M_s S$. Cette quantité a la dimension d'un champ magnétique, et est donnée en Teslas. Les branches en traits pleins sont celles où $d^2W/dx_p^2 > 0$, et les branches en pointillés celles où $d^2W/dx_p^2 < 0$.

paroi de Bloch puisse à tout instant être considérée à l'équilibre. Dans les questions suivantes, on mesurera l'aimantation totale du cristal par sa composante suivant $\vec{e}_y$, notée simplement M .

64 - À l'aide de la figure 9, justifier que la paroi de Bloch est initialement dans un état d'équilibre stable.

65 - On se place d'abord dans le cas où $B_{\max} = 1$ T. À l'aide d'arguments graphiques, et en reproduisant la figure 9, décrire qualitativement l'évolution de la position x_p de la paroi de Bloch pendant un cycle. Quelles valeurs minimale et maximale approximatives atteint-elle, et à quels moments du cycle ? En déduire l'allure de M en fonction de B_0 . L'évolution du système se caractérise-t-elle par un phénomène d'hystérésis ? Justifier.

66 - Représenter de même l'évolution du système dans le diagramme (B_0, x_p) dans le cas $B_{\max} = 3$ T, puis dans le cas $B_{\max} = 5$ T. Observe-t-on un phénomène d'hystérésis ? Voyez-vous une différence entre ces deux derniers cas ?

67 - Les pertes hystérétiques d'énergie dans le cristal croissent-elles ou décroissent-elles avec l'amplitude $B_{\max}$ des variations du champ magnétique extérieur ? Justifier avec soin. On pourra se fonder sur des arguments graphiques, ainsi que sur la réponse à la question 46.

*** Fin de la deuxième partie ***

