

**ECOLE NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE**

CONCOURS D'ADMISSION 2026

JEUDI 16 AVRIL 2026

08h00 - 14h00

FILIERE PSI - Epreuve n° 6

PHYSIQUE (U)

Durée : 6 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

★ ★ ★

Physique de l'audition

Dans ce sujet, nous allons explorer différents aspects de l'un de nos sens : l'audition. Une des capacités primordiales de l'audition est la possibilité de repérer la provenance des sons dans l'espace. On pourrait penser naïvement que la perception spatiale du son est fondée sur le même principe que la perception spatiale des images (la stéréoscopie) : ce n'est pas le cas, car, si les deux sens reposent sur la perception d'ondes, les longueurs d'onde de la lumière sont petites (0,4-0,6 μm) par rapport au diamètre de la pupille, ce qui permet d'obtenir des images, tandis que les longueurs d'ondes acoustiques sont grandes (1,7 cm - 1,7 m) par rapport au diamètre du conduit auditif.

Après une étude de la propagation des ondes sonores (Partie I), nous allons voir l'une des stratégies mises en œuvre par le cerveau pour repérer la direction d'une source sonore avec une précision remarquable, de l'ordre de quelques degrés (Partie II). Nous nous intéresserons enfin au fonctionnement de l'oreille interne, et en particulier au caractère actif de cet organe (Partie III). Nous verrons en particulier que dans certains cas cette activité peut être perçue via l'émission spontanée de son par l'oreille.

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

FORMULAIRE

Valeurs numériques utiles

Les valeurs ci-dessous sont données avec deux à quatre chiffres significatifs, mais pour les applications numériques demandées, on pourra les utiliser avec seulement un ou deux chiffres significatifs.

Constantes fondamentales :

Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Propriétés de l'air sec à 20°C :

Pression atmosphérique	$P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$
Température ambiante	$T_0 = 293,1 \text{ K}$
Masse volumique	$\rho_0 = 1,204 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Vitesse du son	$c = 343,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Capacité thermique massique à pression constante	$c_P = 1\,004 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Capacité thermique massique à volume constant	$c_V = 717 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
Conductivité thermique	$\kappa = 0,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Indice adiabatique	$\gamma = c_P/c_V = 1,400$

Propriétés de l'eau à 20°C :

Masse volumique $\rho_e = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Table de valeurs de $\exp(-x)$ (deux chiffres significatifs)

x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$
0,5	$6,1 \times 10^{-1}$	1,0	$3,7 \times 10^{-1}$	1,5	$2,2 \times 10^{-1}$	2,0	$1,4 \times 10^{-1}$	2,5	$8,2 \times 10^{-2}$
3,0	$5,0 \times 10^{-2}$	3,5	$3,0 \times 10^{-2}$	4,0	$1,8 \times 10^{-2}$	4,5	$1,1 \times 10^{-2}$	5,0	$6,7 \times 10^{-3}$
5,5	$4,1 \times 10^{-3}$	6,0	$2,5 \times 10^{-3}$	6,5	$1,5 \times 10^{-3}$	7,0	$9,1 \times 10^{-4}$	7,5	$5,5 \times 10^{-4}$
8,0	$3,4 \times 10^{-4}$	9,0	$1,2 \times 10^{-4}$	10,0	$4,5 \times 10^{-5}$	11,0	$1,7 \times 10^{-5}$	12	$6,1 \times 10^{-6}$

Gradient et Laplacien en coordonnées sphériques

On considère une fonction f des coordonnées sphériques $(r, \theta, \text{ et } \phi)$, dont on rappelle qu'elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Dans ce système de coordonnées, muni d'une base directe de vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$, les expressions des opérateurs vectoriels gradient ($\vec{\text{grad}}$) et Laplacien (Δ) sont :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi,$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right].$$

Déterminant d'une matrice 3×3

Étant donnée une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

le déterminant de cette matrice a pour expression

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

I.

Équations de propagation du son en espace libre

Dans cette première partie, nous nous proposons d'établir les équations de la propagation du son à partir de bilans microscopiques. Nous verrons en particulier que la relation de dispersion bien connue des ondes acoustiques doit être corrigée pour prendre en compte les phénomènes qui contribuent à l'atténuation de ces ondes en espace libre.

I.1 Préambule : étude de la propagation sans dissipation

L'équation usuelle décrivant la propagation des ondes acoustiques est

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

où c est la vitesse du son et $p(\vec{r}, t)$ est la surpression due à l'onde sonore par rapport à la pression atmosphérique P_0 , la pression totale étant donc $P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t)$.

Q1. Comment se nomme cette équation ?

Q2. À quelle condition sur $\omega \geq 0$ et $k = |\vec{k}|$ la famille de fonctions

$$p_{\vec{k}, \omega}(\vec{r}, t) = p_{\vec{k}, \omega}^{(0)} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2)$$

constitue-t-elle un jeu de solutions de l'équation (1) ? Comment s'appelle ce type de relation ?

Q3. En toute généralité, ces solutions dites "harmoniques" peuvent se mettre sous la forme

$$p_{\vec{k}, \omega}(\vec{r}, t) = p_{\vec{k}, \omega}^{(0)} \cos \varphi(\vec{r}, t).$$

On définit un front d'onde comme étant une surface connexe de même phase, soit

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}_0, t_0),$$

$\vec{r}_0$ et t_0 étant fixés. Quelle est la géométrie des fronts d'onde pour la solution (2) paramétrée par $(\vec{k}, \omega)$ et comment se déplacent-ils ?

I.2 Dérivation de l'équation de propagation du son

L'onde sonore n'est pas seulement une oscillation de la surpression p , mais elle s'accompagne aussi d'oscillations de la vitesse du fluide, de sa masse volumique et, ce qui est peut-être plus surprenant, de sa température. Nous allons à présent établir les relations qui gouvernent la réponse mécanique et thermodynamique de l'air.

Le fluide dans lequel se propage l'onde sonore est compressible. En première approximation, on peut considérer que la transformation thermodynamique subie par un élément de volume V de fluide au passage de l'onde est isentropique (c'est-à-dire à entropie constante). On définit le coefficient de compressibilité isentropique par

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

estimé au voisinage de l'équilibre (c'est-à-dire en l'absence d'onde sonore). On définit la masse volumique locale comme la somme $\rho_0 + \rho(\vec{r}, t)$, où ρ_0 est la masse volumique de l'air à l'équilibre à 20°C, et $\rho(\vec{r}, t)$ est l'incrément de masse volumique dû au passage de l'onde sonore. Pour les ondes sonores usuelles, cet incrément est très faible, $|\rho(\vec{r}, t)| \ll \rho_0$.

Q4. Montrer, en justifiant avec soin les approximations effectuées, que

$$\rho(\vec{r}, t) \simeq \rho_0 \chi_S p(\vec{r}, t). \quad (3)$$

Q5. Rappeler la loi de Laplace. Déterminer l'expression de la compressibilité isentropique χ_S dans le cas d'un gaz parfait à la pression P_0 , à la température T_0 , de masse volumique ρ_0 , et dont l'indice adiabatique vaut $\gamma = c_P/c_V = 1,400$, avec c_P la capacité thermique massique à pression constante et c_V la capacité thermique massique à volume constant.

Q6. En utilisant l'équation de conservation de la matière, montrer que l'on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (4)$$

où $\vec{v}$ est le champ de vitesse et div est l'opérateur divergence. En déduire que, pour les ondes acoustiques qui sont solutions de l'équation (1), le champ de vitesse ne peut pas être nul.

Q7. Justifier la relation

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\vec{\operatorname{grad}} p \quad (5)$$

en réalisant un bilan de quantité de mouvement $d\vec{q} = dq_x \vec{e}_x + dq_y \vec{e}_y + dq_z \vec{e}_z$ sur un petit élément de fluide de dimensions (dx, dy, dz) . On négligera toutes les forces autres que celles de pression et l'on considérera le fluide comme parfait.

La propagation du son est décrite par les 3 équations couplées que sont la conservation de la matière (4), la conservation de la quantité de mouvement (5), et la relation masse volumique-surpression due à la compressibilité de l'air (3).

On considère une solution d'onde plane progressive harmonique (OPPH) selon $\vec{e}_z$ de la forme

$$X(\vec{r}, t) = \underline{X} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (6)$$

où X peut désigner la surpression p , la vitesse v (implicitement selon $\vec{e}_z$) et l'incrément de masse volumique ρ . La quantité $\underline{X}$ désigne l'amplitude complexe de l'oscillation du champ considéré.

Q8. La solution (6) n'est pas physique car elle prend des valeurs dans $\mathbb{C}$. Comment retrouver une solution physique dans $\mathbb{R}$ à partir de celle-ci ? Quel est l'intérêt de travailler avec une solution complexe abstraite plutôt qu'une solution réelle ?

Q9. Utiliser ce modèle de solution complexe dans le jeu d'équations décrivant la propagation du son et montrer que celui-ci donne une équation matricielle

$$\mathbf{A}(\omega, k) \begin{pmatrix} \underline{\rho} \\ \underline{v} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = 0,$$

où la matrice $\mathbf{A}(\omega, k)$ s'écrit

$$\mathbf{A}(\omega, k) = \begin{pmatrix} -i\omega & ik\rho_0 & 0 \\ 0 & -i\omega\rho_0 & ik \\ 1 & 0 & -\rho_0\chi_S \end{pmatrix}.$$

Q10. Justifier que la relation de dispersion est donnée par l'équation $\det \mathbf{A}(\omega, k) = 0$, et en déduire l'expression de la célérité des ondes sonores c en fonction de χ_S et ρ_0 .

Q11. La solution modèle que nous avons choisie était une OPPH se propageant selon $\vec{e}_z$. Pourquoi ce choix, qui semble a priori restrictif, ne l'est-il en fait pas pour le problème considéré ?

Q12. On définit la température locale absolue comme la somme $T_0 + T(\vec{r}, t)$, où T_0 est la température de l'air à l'équilibre à 20°C et $T(\vec{r}, t)$ est la perturbation due au passage de l'onde acoustique. En supposant que l'air est un gaz parfait, et en utilisant la relation entre P et V dans le cas d'une compression isentropique, montrer que $T(\vec{r}, t)$ est proportionnelle à $p(\vec{r}, t)$, en exprimant le facteur de proportionnalité en fonction de T_0 , P_0 et γ .

I.3 Prise en compte des effets de la température

Pour trouver les équations reliant la pression et la masse volumique, nous avons fait l'hypothèse que les transformations subies localement par le fluide étaient isentropiques. Nous allons à présent revenir sur cette hypothèse.

Q13. Quelles sont les deux conditions pour pouvoir faire cette hypothèse ? Pourquoi est-il nécessaire que la vitesse soit très faible ?

Q14. Lorsque la transformation est telle qu'il n'y a pas d'entropie créée, comment varie l'entropie S d'un volume V de fluide si celui-ci reçoit un transfert thermique Q de la part du milieu extérieur à la température d'équilibre T_0 ?

Q15. Soit $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique. En considérant le volume d'air infinitésimal de dimensions (dx, dy, dz) centré sur le point (x, y, z) , faire un schéma et montrer que le transfert thermique reçu par ce volume $dV = dx dy dz$ pendant dt est donné par

$$\delta Q = -dV dt \operatorname{div} \vec{j}_Q.$$

Q16. Rappeler la loi de Fourier qui donne l'expression du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ en fonction du champ de température $T(\vec{r}, t)$ et de la conductivité thermique κ .

On se restreint pour l'instant au cas des transformations isobares lentes, durant lesquelles le fluide est à l'équilibre mécanique. Le cas hors équilibre mécanique, pertinent pour le couplage à l'onde sonore, sera traité à partir de la question **Q23**.

Q17. Utiliser le premier principe de la thermodynamique pour montrer qu'en l'absence de travail le transfert thermique vaut $\delta Q = \rho_0 c_P dV dT$. En déduire que, pour les petites variations autour de l'équilibre, la variation locale de l'entropie massique s est directement proportionnelle à la variation locale de température et est donnée par la relation

$$ds = \frac{c_P}{T_0} dT \quad (7)$$

Q18. En supposant κ uniforme, montrer alors que l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'entropie massique est

$$\rho_0 \frac{ds}{dt} = \frac{\kappa}{T_0} \Delta T, \quad (8)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien.

Q19. Déduire de ce qui précède l'équation de la diffusion thermique. Donner l'expression du coefficient de diffusion D en fonction de ρ_0, κ et c_P .

Q20. Nous allons aborder le problème de la diffusion thermique sous un angle un peu différent. Montrer que, si l'on considère une solution en température T et entropie massique s sous la forme d'une OPPH définie par l'équation (6), alors les amplitudes d'oscillation $\underline{T}$ et $\underline{s}$ obéissent à l'équation matricielle

$$\mathbf{B}(\omega, k) \begin{pmatrix} \underline{T} \\ \underline{s} \end{pmatrix} = 0,$$

où la matrice $\mathbf{B}(\omega, k)$ est définie par

$$\mathbf{B}(\omega, k) = \begin{pmatrix} c_P & -T_0 \\ -\frac{\kappa}{T_0} k^2 & i\omega \rho_0 \end{pmatrix}.$$

Q21. En écrivant la condition sur $\mathbf{B}(\omega, k)$ pour que des solutions non triviales existent, expliciter la relation entre ω et k en faisant intervenir le coefficient de diffusion D .

Q22. Pour obtenir l'équation régissant l'onde sonore, nous avons fait l'hypothèse d'une transformation locale isentropique. Que vaut le coefficient de conductivité thermique κ dans ce cas ?

Si la transformation n'est pas isentropique, il faut ajouter un terme à la relation (3) donnant l'incrément de la masse volumique, et on écrit

$$\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S p + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P s.$$

De même, on a

$$T = \left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S p + \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_P s.$$

Des relations thermodynamiques permettent par ailleurs d'obtenir

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P = -\frac{\rho_0 \beta T_0}{c_P} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_P = \frac{T_0}{c_P}$$

où β est le coefficient de dilatation thermique isobare, défini par

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P$$

Ces dérivées partielles sont évaluées au voisinage de la température T_0 et de la pression P_0 à l'équilibre.

Q23. Quelle est l'expression du coefficient de dilatation thermique isobare β pour un gaz parfait ?

Q24. Sachant que pour un gaz parfait

$$\left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_S = \frac{T_0 \beta}{\rho_0 c_P},$$

expliciter les équations donnant ρ et T en fonction de p et s et des grandeurs à l'équilibre pertinentes.

Q25. Montrer alors que le jeu d'équations vérifié par une solution modèle d'OPPH (6) prenant en compte le couplage entre les grandeurs mécaniques $\underline{p}$, $\underline{\rho}$, $\underline{v}$ et thermodynamiques $\underline{s}$ et $\underline{T}$ s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}(\omega, k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}(\omega, k) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \underline{\rho} \\ \underline{v} \\ \underline{p} \\ \underline{T} \\ \underline{s} \end{pmatrix} = 0,$$

où $\mathbf{A}(\omega, k)$ et $\mathbf{B}(\omega, k)$ sont les matrices définies précédemment. Cette matrice 5×5 sera notée $\mathbf{M}(\omega, k)$.

Comme précédemment, l'équation reliant k à ω est $\det \mathbf{M}(\omega, k) = 0$. Pour cette matrice $\mathbf{M}$, on admet que son déterminant s'écrit sous la forme

$$\det \mathbf{M}(\omega, k) = \det \mathbf{A}(\omega, k) \det \mathbf{B}(\omega, k) - \frac{\kappa \rho_0}{c_P T_0} (k\omega)^2$$

Si la conductivité thermique est faible, on peut faire l'hypothèse que les solutions de $\det \mathbf{M}(\omega, k) = 0$ sont proches des solutions pour $\kappa = 0$. On suppose donc que pour une pulsation ω donnée on peut écrire le

nombre d'onde k solution de l'équation comme $k = k_0 + \varepsilon$, où k_0 est le nombre d'onde de l'onde acoustique en l'absence de conductivité thermique et dont la partie réelle est positive, et ε est une petite correction.

Q26. En utilisant un développement limité de $\det \mathbf{M}(\omega, k) = 0$ au premier ordre en ε , au voisinage de k_0 , montrer que

$$\varepsilon \simeq \frac{\frac{\kappa \rho_0}{c_P T_0} (k_0 \omega)^2}{\left. \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial k} \right|_{k_0} \det \mathbf{B}(\omega, k_0) - 2 \frac{\kappa \rho_0}{c_P T_0} \omega^2 k_0}. \quad (9)$$

Q27. En déduire la partie imaginaire de k , à l'ordre le plus bas en κ , en fonction de k_0 et $\omega/\omega_{\text{th}}$, où $\omega_{\text{th}} = 2c_P^2 T_0 \rho_0 / \kappa$. En déduire l'expression de la longueur d'atténuation δ de l'intensité sonore lorsque la diffusion thermique est prise en compte.

Q28. Évaluer numériquement cette longueur caractéristique d'atténuation δ à 1 kHz et conclure.

II.

Perception spatiale de l'audition

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la manière dont le cerveau exploite l'aspect ondulatoire des ondes sonores pour estimer la direction de leurs sources.

II.1 Onde sonore émise par une source sphérique

Considérons une sphère matérielle de centre O dont le rayon peut très légèrement varier au cours du temps, selon $R(t) = R_0 + \epsilon(t)$ avec R_0 son rayon moyen et $\epsilon(t) = \epsilon_\omega e^{-i\omega t}$ une petite oscillation monochromatique à la pulsation ω . Du fait de cette variation $\epsilon(t)$ de son rayon instantané, cette sphère est une source d'ondes sonores. On considère donc dans cette partie l'onde sonore monochromatique de pulsation ω produite par cette sphère pulsante et se propageant dans un espace infini sans obstacle. On utilisera la fonction suivante de la distance r au centre O des coordonnées

$$g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}.$$

Q29. Pourquoi les champs p , ρ , et T ne dépendent-ils que de t et de la norme r de $\vec{r}$?

Q30. Montrer que, pour la géométrie considérée, un champ de surpression de la forme

$$p(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

où f est une fonction quelconque, est solution de l'équation de propagation (1).

Q31. En déduire que la solution harmonique complexe à la pulsation ω est nécessairement de la forme

$$p(\vec{r}, t) = \underline{A}_\omega g(r) e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

Nous appellerons cette solution « onde sphérique progressive harmonique » (OSPH).

Q32. Utiliser l'invariance du problème par renversement du temps pour trouver une deuxième solution de l'équation de propagation, indépendante de celle écrite à la question précédente.

Q33. Montrer, à partir de l'équation de conservation de la matière (4), que la masse $M(r, t)$ d'air contenu dans un volume sphérique de rayon r centré en O varie en fonction du temps comme

$$\frac{dM(r, t)}{dt} = -4\pi r^2 \rho_0 v_r(r, t)$$

Justifier alors que le champ de vitesse moyenné sur une période est nul.

Q34. En utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5), justifier que le champ de vitesse de l'OSPH définie en **Q31** est radial et montrer qu'il peut se mettre sous la forme

$$v_r(r, t) = \underline{B}_\omega g(r) \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{-i\omega t},$$

où $\underline{B}_\omega$ est une constante qu'on ne cherchera pas à expliciter dans cette question.

Q35. On définit l'impédance acoustique $\underline{Z}$ comme

$$\underline{Z} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{p(r, t)}{v_r(r, t)}.$$

Montrer que, pour l'OSPH, on a $\underline{Z} = \underline{A}_\omega / \underline{B}_\omega = c\rho_0$.

Q36. En utilisant la condition aux limites sur la sphère, trouver une relation entre $R(t)$ et $v_r(R(t), t)$. Utiliser cette condition aux limites pour exprimer $\underline{\epsilon}_\omega$ en fonction de $\underline{B}_\omega$, ω , k , R_0 et $g(R_0)$ dans la limite des petites variations du rayon instantané de la sphère, $\epsilon \ll c/\omega$ et $\epsilon \ll R_0$.

Q37. La sphère pulsante peut aussi être vue comme une source de débit volumique $S(t)$. Écrire $S(t)$ en fonction de R et v_r . En déduire la relation entre l'amplitude monochromatique $\underline{S}_\omega$ de ce débit volumique et celle $\underline{\epsilon}_\omega$ de la variation du rayon instantané, puis l'expression de $\underline{S}_\omega$ en fonction de $\underline{B}_\omega$ et d'autres grandeurs du problème.

Q38. Dans le régime harmonique, le flux de puissance par unité de surface portée par l'onde acoustique et moyennée sur une période $T = 2\pi/\omega$ vaut

$$\vec{\Pi}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}[p(\vec{r}, t)] \text{Re}[\vec{v}(\vec{r}, t)] dt,$$

où $\text{Re}[X]$ désigne la partie réelle d'un complexe X , en rappelant que p et v sont des grandeurs complexes. Montrer que $\vec{\Pi}(r)$ peut s'exprimer comme une fonction simple de $p(\vec{r}, t)\vec{v}^*(\vec{r}, t)$, où $\vec{v}^*(\vec{r}, t)$ désigne le complexe conjugué de $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Q39. Exprimer la puissance acoustique moyenne totale $\Phi(r)$ traversant la sphère de rayon r centrée sur la source acoustique, en fonction de r , $\vec{\Pi}(r)$ et $\vec{e}_r$. Montrer que $\Phi(r)$ est indépendante du rayon r considéré et l'écrire en fonction de $\underline{Z}$ et $|\underline{B}_\omega|^2$. À quel principe doit-on cette propriété de l'onde acoustique émise ? En déduire la valeur de Φ dans le cas de l'émission par une source acoustique harmonique de débit volumique $S(t)$. Que donne cette relation dans la limite d'une source de petite taille par rapport à la longueur d'onde acoustique ? On l'écrira en fonction de $\underline{Z}$, $|\underline{S}_\omega|^2$ et du nombre d'onde k .

Q40. Exprimer l'amplitude $|\underline{\epsilon}_\omega|$ de l'oscillation de la sphère pulsante, en fonction de son rayon moyen R_0 , de la pulsation ω , de c , de l'impédance acoustique $\underline{Z}$ de l'air et de la puissance acoustique Φ . Faire l'application numérique dans le cas d'une oscillation à 1 kHz, avec $R_0 = 1,5$ cm et $\Phi = 1$ W. L'approximation utilisée à la **Q36** est-elle respectée ?

II.2 Perception par différence temporelle

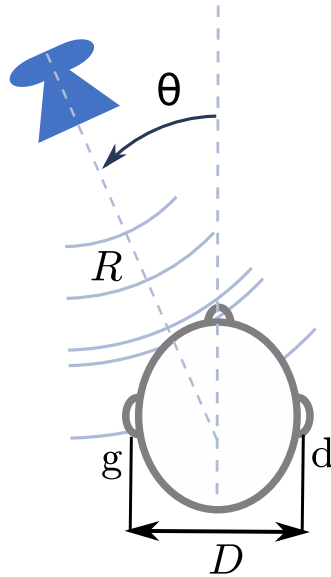


FIGURE 1 – Représentation schématique de la perception auditive stéréophonique pour une source sonore ponctuelle.

Lors de l'audition, le cerveau essaie de reconstituer la position de la source sonore grâce aux indices liés à la différence de positionnement de nos deux oreilles dans l'espace. Les indices les plus simples sont de 3 types : la différence d'intensité perçue (*Inter Level Difference*, ILD), la différence temporelle perçue (*Inter Temporal Difference*, ITD) et la différence de phase perçue (*Inter Phase Difference*, IPD).

Nous allons étudier en détail la différence temporelle.

Q41. En supposant que le corps est principalement constitué d'eau et que la vitesse du son dans l'eau est de 1500 m.s^{-1} , évaluer numériquement l'impédance acoustique de l'eau. En déduire une estimation des coefficients de réflexion et de transmission en puissance sonore à l'interface air-eau. Pourquoi peut-on en conclure qu'en première approximation les sons ne pénètrent pas directement dans la tête (d'où la nécessité des oreilles) ?

On considère (Fig. 1) une source sonore transitoire ponctuelle (comme un claquement de doigts), située dans le même plan horizontal que la tête, à une distance R de celle-ci et un angle θ relatif au nez ($\theta > 0$ correspondant à une source du côté gauche). Dans tout ce qui suit, on négligera l'effet de la tête sur la propagation du son et l'on considérera que la source est suffisamment éloignée ($R \gg D$, où D est le diamètre de la tête).

Q42. Quel est le délai Δt de perception (ITD) de la surpression entre l'oreille droite et l'oreille gauche, en fonction de D , c et θ ?

Q43. Quelle est l'ITD maximale ? En donner une évaluation numérique en considérant que la tête humaine moyenne a un diamètre de 23 cm.

Il existe un phénomène auditif appelé effet de précéence ou effet de Haas : cet effet montre notre capacité à discerner un son de son écho, ce qui est essentiel pour que le cerveau puisse identifier une unique source sonore et ne pas être pollué par l'effet des échos dans une pièce par exemple. Des expériences ont montré que le cerveau peut séparer deux sons extrêmement brefs ('clicks') entendus, à condition qu'ils parviennent à l'oreille avec un délai compris entre 1 et 5 ms.

Q44. Pourquoi ce délai est-il nécessairement plus grand que l'ITD maximal ?

Q45. Quelle est la direction perçue $\theta_{perçu}$ des ondes sonores pour une source sonore à la distance D et produisant un ITD Δt donné ? Notre cerveau étant habitué à percevoir les sons dans l'air, comment la direction perçue est-elle faussée lorsque la source et l'auditeur se trouvent dans l'eau ? On écrira $\theta_{perçu}$ en fonction de l'angle θ réel et des vitesses de propagation du son dans l'air et dans l'eau et l'on commentera la relation trouvée.

Q46. Dans quelle direction relative à la tête la précision angulaire du repérage par ITD est-elle la meilleure ? On justifiera la réponse.

Q47. Les meilleures performances de localisation utilisant uniquement l'ITD sont obtenues à 1 kHz, ce qui permet une précision de 3° à 4° . Que peut-on en déduire comme valeur de la plus courte ITD perceptible ?

Q48. On rappelle que l'oreille humaine perçoit les sons compris entre 20 Hz et 20 kHz. En déduire une estimation de l'ITD minimale perceptible à partir de la condition d'échantillonnage de Nyquist-Shannon, et la comparer à celle déduite des tests expérimentaux à la question précédente.

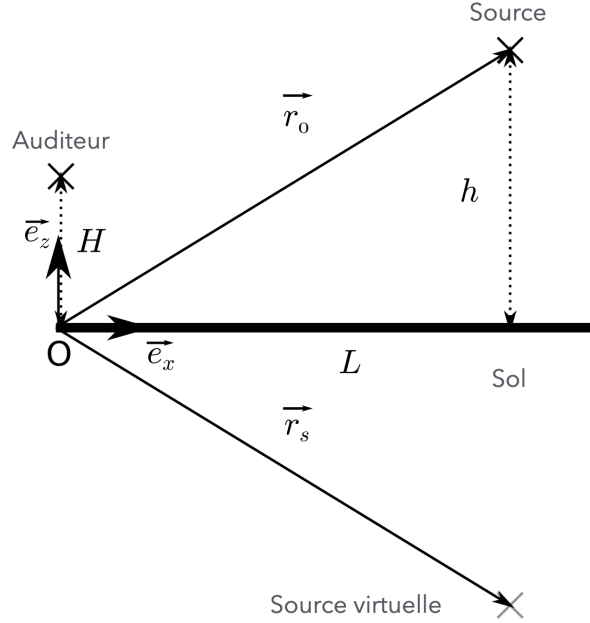


FIGURE 2 – Schéma de la géométrie considérée pour la détermination de l'effet de sol.

II.3 Perception de l'élévation

Dans la sous-partie précédente nous nous sommes intéressés à la sélectivité azimutale de l'audition. Nous allons maintenant nous interroger sur sa capacité à percevoir l'élévation d'une source sonore par rapport à la tête. Pour simplifier, on ne s'intéresse dorénavant qu'à une seule oreille. L'effet le plus notoire est lié à la présence du sol (voir la Fig. 2).

Q49. Le sol étant supposé rigide, écrire la condition aux limites qui s'y applique pour la vitesse de l'air. À l'aide de la relation (5), en déduire une condition sur la surpression au niveau du sol.

Q50. La solution de ce problème dans le demi-espace au dessus du sol est donnée par

$$p(\vec{r}, t) = p_1(|\vec{r} - \vec{r}_0|, t) + p_1(|\vec{r} - \vec{r}_S|, t),$$

où $\vec{r}_0$ est la position de la source, $\vec{r}_S$ est la position d'une source virtuelle, image de la source par symétrie planaire par rapport au sol (voir la Fig. 2), et $p_1(r, t)$ est la solution de l'équation de propagation en espace libre pour une source ponctuelle au centre du repère ($\vec{r}_0 = \vec{0}$). On note h la hauteur de la source par rapport au sol. Justifier que cette forme de $p(\vec{r}, t)$ est bien solution de l'équation de propagation, et montrer qu'elle respecte les conditions aux limites (i) au niveau du sol et (ii) à l'infini dans le demi-espace supérieur. On écrira $\vec{r}_0 = \vec{r}_{0,\perp} + h\vec{e}_z$ et $\vec{r} = \vec{r}_\perp + z\vec{e}_z$.

On considère un auditeur dont la tête est à une hauteur H du sol, et une distance L au sol de la source sonore ponctuelle.

Q51. En supposant que la source émet monochromatiquement à la pulsation ω , que vaut la surpression $p(\vec{r}, t)$ perçue à la position de l'auditeur en fonction de h , H , L , $\underline{A}_\omega$, k et ω ?

Q52. L'intensité sonore s'écrit $I = C|p(r, t)|^2$ avec C une constante qu'on ne cherchera pas à calculer. Montrer qu'au niveau de l'auditeur, on a

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{\omega}{c}(r_1 - r_2) \right], \quad (11)$$

où I_1 est l'intensité sonore perçue du fait de l'onde directe $p_1(|\vec{r} - \vec{r}_0|, t)$ et I_2 est l'intensité sonore perçue du fait de l'onde réfléchie $p_1(|\vec{r} - \vec{r}_S|, t)$. Dans l'équation (11), on a noté pour simplifier $r_1 = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ et $r_2 = |\vec{r} - \vec{r}_s|$.

Q53. On note I_0 l'intensité sonore perçue en l'absence de sol. Que vaut I_0 en fonction de I_1 et I_2 ? On suppose que la source est à grande distance, soit $L \gg H$ et $L \gg h$. Montrer qu'à une telle distance, on a

$$r_1 - r_2 \simeq -2 \frac{Hh}{L}.$$

En déduire I/I_0 en fonction de ω , c , h , H et L .

Q54. Représenter graphiquement cette quantité I/I_0 en fonction de l'élévation h de la source, convenablement normalisée.

Q55. Montrer que pour certaines valeurs ω_n de la pulsation, l'intensité perçue chute brutalement. Comment varie l'intervalle $\Delta\omega$ entre deux telles pulsations d'annulation lorsque la hauteur h de la source augmente ? À quelle expérience d'un autre domaine de la physique pouvez-vous relier le phénomène décrit ici ?

Lorsque la tête est immobile dans l'espace, ce filtrage sonore naturel encode donc directement l'élévation de la source. Cette caractéristique de filtrage par effet de sol est connu du système auditif et lui permet de repérer l'élévation relative des sources.

III.

L'audition : un sens actif

Nous allons maintenant explorer un aspect différent de la perception auditive. Une fois que l'onde sonore a pénétré dans l'oreille, elle entraîne la vibration du tympan et des osselets (marteau et enclume, voir la Fig. 3) qui permettent de transmettre la vibration à une cavité osseuse, la cochlée. Plus précisément, l'onde sonore met en mouvement une lame appelée membrane basilaire au sein de la cochlée (voir la Fig. 4a). Le fonctionnement exact de la cochlée est encore largement débattu aujourd'hui. C'est ce que nous allons étudier dans cette partie.

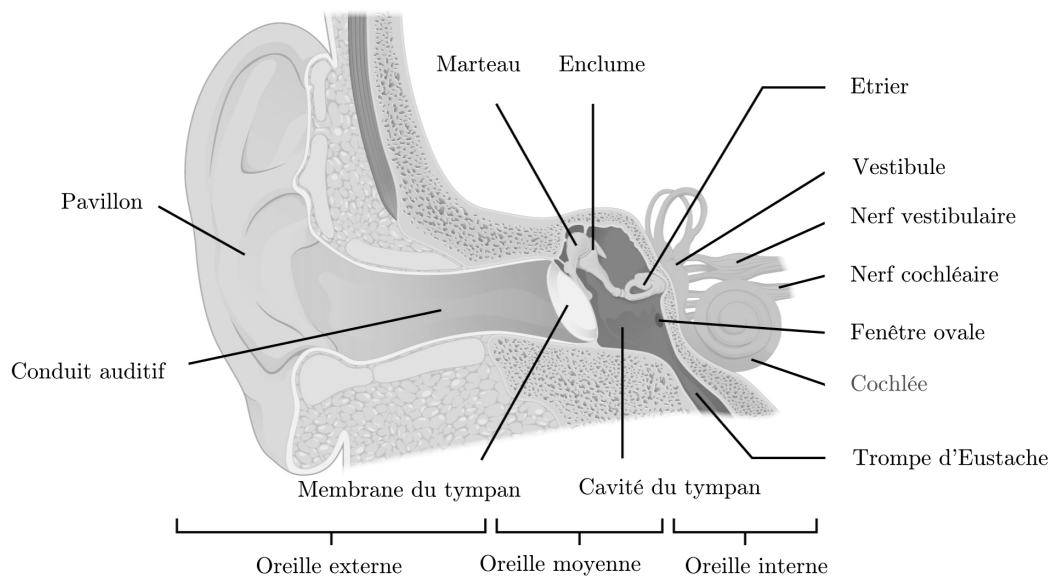


FIGURE 3 – Structure interne de l'oreille (adapté de Textbook OpenStax Anatomy and Physiology Published May 18, 2016, licence CC BY 4.0).

III.1 Modèle passif de Helmholtz

En 1885, Helmholtz en donne une première explication (voir la Fig. 4b) : la membrane basilaire est modélisée comme un ensemble d'éléments dont le déplacement x_n est celui d'un oscillateur harmonique amorti de masse m_n , de constante de raideur k_n , et de coefficient de frottement visqueux h_n . L'effet de l'onde sonore correspond à l'application d'une force $f_n(t)$ sur cet oscillateur local. L'amplitude du déplacement de la membrane x_n est mesurée par les cellules ciliées internes qui convertissent cette information en un signal nerveux.

Q56. À partir de cette description, écrire l'équation différentielle régissant le déplacement x_n de l'élément n de la membrane basilaire en présence d'une onde sonore. Quelle est la pulsation ω_n de résonance de cet élément n et son facteur de qualité Q_n , en fonction des paramètres de l'oscillateur ?

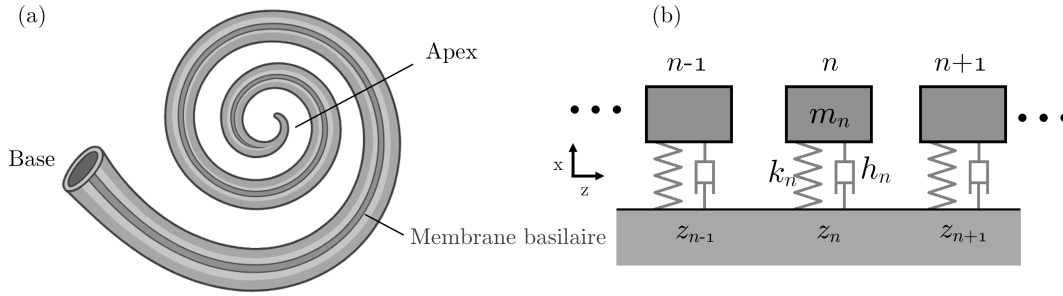


FIGURE 4 – (a) Structure interne de la cochlée contenant la membrane basilaire. (b) Modèle mécanique de Helmholtz de la membrane basilaire.

Q57. Lorsqu'un son pur de pulsation ω parvient jusqu'à l'oreille interne, il en résulte une force sur l'élément n de la membrane basilaire de la forme

$$f_n(t) = \underline{f}_n e^{-i\omega t}.$$

On supposera que l'amplitude $\underline{f}_n$ de ce forçage est réelle. En écrivant le déplacement x_n de cet élément de la membrane sous la forme

$$x_n = \underline{x}_n e^{-i\omega t},$$

avec $\underline{x}_n = |\underline{x}_n| e^{i\phi_n}$ son amplitude complexe, déterminer le module $|\underline{x}_n|$ et la phase ϕ_n de celle-ci lorsque l'élément est soumis au forçage $f_n(t)$. Représenter graphiquement l'allure du module et de la phase de $\underline{x}_n$ en fonction de ω .

Q58. Helmholtz avait remarqué que la raideur k_n évolue le long de la membrane basilaire de manière exponentielle. En revanche, la masse m_n est la même pour tous les oscillateurs. Soit z_n la position de l'élément n le long de la membrane (voir la Fig. 4b), on pose alors

$$k_n = k_0 \exp\left(-\frac{z_n}{l}\right),$$

avec $l = 0,7$ cm. Comment évolue la pulsation de résonance ω_n de l'oscillateur local en fonction de la position sur la membrane basilaire, dont la longueur totale est $L = 3,5$ cm ? Pour désigner la cochlée, on utilise parfois le terme de « capteur acoustique à arc-en-ciel », pourquoi cette dénomination ?

Q59. Dédurre de ce qui précède une estimation du rapport de la fréquence maximale à la fréquence minimale susceptibles d'être détectées par la cochlée. Comparer à la gamme sonore de l'oreille humaine et commenter.

III.2 Les cellules ciliées externes

Helmholtz a fondé son modèle sur des observations in vitro, mais en réalité les cellules de l'oreille participent elles aussi au forçage de la membrane basilaire, ce qui n'a été observé in vivo et compris qu'un siècle plus tard par von Békésy. Nous allons donc modifier le modèle simple de Helmholtz pour décrire le rôle de ces cellules, dites cellules ciliées externes. Pour cela, nous devons remarquer que ces cellules connectent la membrane basilaire à une membrane secondaire, appelée membrane tectorielle, qui se déforme elle aussi. On décrit la déformation de cette dernière, à la position de l'élément n de la membrane basilaire, par une coordonnée y_n , elle aussi régie par l'équation d'un oscillateur harmonique, dont les paramètres sont notés m'_n , k'_n et h'_n . Cette membrane tectorielle subit une force proportionnelle à l'accélération¹ de la membrane basilaire,

$$f'_n = -C_n \ddot{x}_n,$$

avec C_n une constante positive.

Q60. En régime harmonique à la pulsation ω , on considère les amplitudes complexes $\underline{x}_n$ et $\underline{y}_n$ des déplacements x_n et y_n . Écrire la fonction de transfert $H(\omega) = \underline{y}_n / \underline{x}_n$ qui les relie.

Q61. En pratique, $k'_n / m'_n = k_n / m_n$ et $h'_n / m'_n \gg h_n / m_n$. Que peut-on dire de la pulsation de résonance ω'_n et du facteur de qualité Q'_n de ce deuxième résonateur en y_n par rapport au premier résonateur en x_n ? On se place au voisinage de la résonance de l'oscillateur x_n , soit $\omega \approx \omega_n$. Pourquoi ce choix? Justifier alors que

$$\omega_n - \omega \ll \frac{\omega}{2Q'_n}.$$

En déduire, via une approximation de la fonction de transfert $H(\omega)$, que dans les conditions d'intérêt pour la détection sonore on a

$$y_n \simeq -\frac{C_n}{h'_n} \dot{x}_n$$

Par la suite, on se placera toujours dans ce régime.

Les cellules ciliées externes appliquent une force supplémentaire sur la membrane basilaire $f_{cc,n}(y_n)$, qui dépend du déplacement de la membrane tectorielle y_n . La réponse des cellules ciliées externes est très non-linéaire et nous prendrons comme modèle

$$f_{cc,n}(y_n) = -\alpha y_n + \beta y_n^3,$$

avec α et β deux constantes positives, indépendantes de n .

Q62. Écrire l'équation de la dynamique de la membrane basilaire x_n incluant maintenant cet effet des cellules ciliées externes. On utilisera les quantités

$$\alpha' = \frac{C_n \alpha}{h'_n m_n} \quad \text{et} \quad \beta' = \frac{\beta}{m_n} \left(\frac{C_n}{h'_n} \right)^3.$$

Quelle approximation peut-on faire dans la limite des ondes sonores de très faible amplitude? Montrer que dans ce cas les cellules ciliées externes produisent un amortissement négatif (c'est-à-dire un gain) de coefficient h''_n , dont on donnera l'expression en fonction de C_n , α et h'_n .

1. On fait remarquer que dans cette sous-partie on note $\dot{X}$ et $\ddot{X}$ les dérivées première et seconde, respectivement, d'une grandeur X par rapport au temps.

III.3 Émissions oto-acoustiques et test de surdité

Les oreilles émettent spontanément des sons très faibles, même en l'absence de stimulus extérieur. Ce phénomène est appelé émission oto-acoustique spontanée (EOAS). Certains acouphènes (perception sonore de sons inexistantes) sont dus à une activité cochléaire spontanée, et pourraient être associés à des EOAS. Nous allons étudier un scénario possible d'EOAS.

Q63. Montrer que, si dans la réponse des cellules ciliées externes le coefficient α est trop important et qu'on néglige le terme non linéaire en βy_n^3 , alors la membrane basilaire est instable, même en l'absence de stimulus. Écrire le seuil d'instabilité en α en fonction de h_n , h'_n et C_n . Pourquoi est-il légitime de ne pas considérer le terme de réponse non linéaire pour déterminer ce seuil d'instabilité ?

Dans le cas d'une instabilité de ce type, intéressons-nous maintenant au régime permanent. On souligne que la présence du terme non-linéaire en βy_n^3 impose de repasser à une notation réelle. On pourra utiliser la notation *c.c.* pour désigner les complexes conjugués qui apparaissent dans les expressions.

Q64. Expliquer qualitativement, à l'aide de l'équation obtenue à la **Q62**, pourquoi la non linéarité permet d'atteindre le régime permanent. En première approximation, on suppose que l'oscillation spontanée atteinte en régime permanent est quasi-sinusoidale et de la forme $x_n \simeq x_0 \sin(\omega t)$. Montrer que la composante de pulsation ω dans $\dot{x}_n^3$ vaut $\frac{3}{4}(\omega x_0)^3 \cos \omega t$.

Q65. Montrer qu'en régime permanent, l'amplitude x_0 doit vérifier à tout instant une équation du type

$$A(x_0) \sin \omega t + B(x_0) \cos \omega t = 0.$$

Pour obtenir cette relation, on négligera toutes les composantes de pulsations différentes de ω dans $\dot{x}_n^3$. Justifier que cette relation implique que $A(x_0) = B(x_0) = 0$, et en déduire l'amplitude x_0 . Commenter le résultat obtenu.

Les cellules ciliées externes sont indispensables à l'audition. Nous allons voir qu'il est possible de contrôler leur bon fonctionnement par un test acoustique simple. Celui-ci consiste à envoyer simultanément deux sons de pulsations Ω_1 et Ω_2 (avec $\Omega_1/\Omega_2 \sim 1,1$) dans le conduit auditif. Si la cochlée fonctionne convenablement, nous allons voir que la membrane basilaire vibre à une pulsation différente, qui peut être perçue à l'aide d'un microphone placé dans le dispositif émetteur.

Q66. Exprimer la force de forçage $f_n(t)$ dans le cas de l'excitation à deux pulsations, d'amplitudes complexes $\underline{f}_{\Omega_1}$ et $\underline{f}_{\Omega_2}$. On suppose dans cette question que le coefficient α est suffisamment faible pour éviter le régime d'EOAS, et que $\beta = 0$. Dans ce cas, quel principe permet d'affirmer que le système ne peut pas osciller à une pulsation différente des pulsations de forçage Ω_1 et Ω_2 ? Montrer que le déplacement $x_n(t)$ de l'élément n de la membrane basilaire s'écrit alors

$$x_n(t) \simeq x_{n,lin}(t) = \frac{1}{2} [\underline{x}_{\Omega_1} e^{-i\Omega_1 t} + \underline{x}_{\Omega_2} e^{-i\Omega_2 t} + \underline{x}_{-\Omega_1} e^{i\Omega_1 t} + \underline{x}_{-\Omega_2} e^{i\Omega_2 t}], \quad (12)$$

avec $\underline{x}_\omega = \chi(\omega) \underline{f}_\omega$, où $\chi(\omega)$ est la sensibilité du système à la pulsation ω , qu'on exprimera en fonction de $\omega, \omega_n, Q_n, \alpha'$ et m_n .

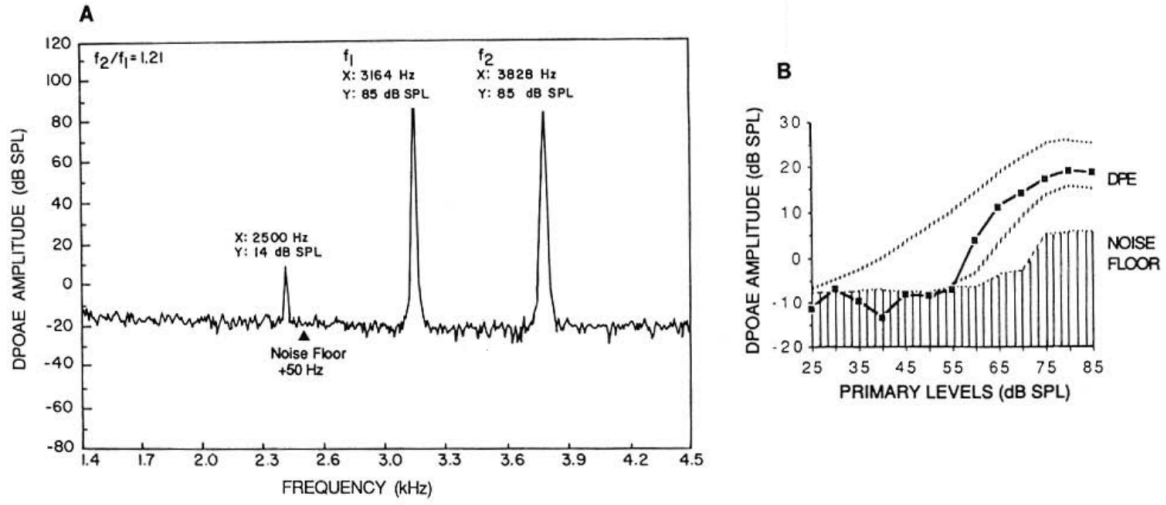


FIGURE 5 – Test de surdité enregistré chez un individu à l'audition normale. La figure A représente l'amplitude du son enregistré dans l'oreille en fonction de la fréquence lorsque celle-ci est soumise à deux excitations monochromatiques aux fréquences f_1 et f_2 . Le triangle plein indique la fréquence qui sert de référence pour caractériser le niveau de bruit (représenté par les lignées hachurées verticalement dans la figure B). Une émission est considérée comme présente si son amplitude est supérieure de plus de 3 dB au niveau du plancher de bruit correspondant. La figure B représente l'amplitude de l'émission à 2500 Hz en fonction de la puissance sonore des sons excitateurs. Les paires de lignes en pointillés représentent la plage de dispersion à une déviation standard des amplitudes d'émission pour une population dont les oreilles fonctionnent normalement. Figures adaptées de B. L. Lonsbury-Martin, M. L. Whitehead, & G. K. Martin, *Clinical applications of otoacoustic emissions*. Journal of Speech, Language, and Hearing Research, 34(5), 964-981 (1991).

Q67. On introduit à présent la non-linéarité ($\beta > 0$) en considérant que son effet sur le déplacement de l'élément n se met sous la forme

$$x_n(t) \simeq x_{n,lin}(t) + x_{n,NL}(t),$$

où $x_{n,NL}(t)$ est une petite correction au régime linéaire de l'équation (12). Montrer que l'équation de dynamique non-linéaire peut alors se mettre sous la forme

$$\ddot{x}_n + \left(\frac{\omega_n}{Q_n} - \alpha' \right) \dot{x}_n + \omega_n^2 x_n = \frac{f_n(t)}{m_n} + \frac{f_{NL}(t)}{m_n}.$$

en donnant l'expression de f_{NL} en fonction de β' , m_n et $\dot{x}_{n,lin}$.   partir de l'expression (12) de $x_{n,lin}$, déterminer les pulsations Ω_m apparaissant dans le terme de forçage non-linéaire f_{NL} . On suppose que Ω_1 et Ω_2 sont proches de la pulsation de résonance basilaire ω_n . Montrer que, parmi les pulsations $\Omega_m \geq 0$, quatre sont proches de la résonance. On notera Ω_{s_1} et $\Omega_{s_2} < \Omega_{s_1}$ les deux qui sont distinctes de Ω_1 et Ω_2 . On ne consid rera pas les pulsations $\Omega_m < 0$.

Q68. Déterminer l'amplitude $\underline{x}_{\Omega_{s_1}}$ du signal à la pulsation Ω_{s_1} , en fonction de $\chi(\Omega_{s_1}), \chi(\Omega_1), \chi(\Omega_2), \underline{f}_{\Omega_1}, \underline{f}_{\Omega_2}, \Omega_1, \Omega_2, \beta'$ et m_n . On utilisera le fait que

$$\underline{f}_{-\Omega_2} = \underline{f}_{\Omega_2}^* \quad \text{et} \quad \chi(-\Omega_2) = \chi^*(\Omega_2).$$

La mesure de l'émission de l'oreille soumise à une excitation sonore bifréquence (f_1 et f_2) chez un individu à l'audition normale est représentée sur la Fig. 5.

Q69. Quelles sont les fréquences d'émission oto-acoustiques attendues ? Les retrouve-t-on sur la figure 5A ? D'après **Q68**, comment doit varier l'amplitude sonore du pic d'émission à 2500 Hz en fonction des amplitudes sonores $\left| \underline{p}_{\Omega_1} \right|$ et $\left| \underline{p}_{\Omega_2} \right|$ des sources aux pulsations correspondantes ? Commenter la Fig. 5B vis-à-vis de cette prédiction (SPL signifie « sound pressure level », c'est-à-dire niveau de pression sonore).

Q70. En analysant la figure 5B, déduire quel est le niveau sonore optimal pour un test d'audition par émission autoacoustique. Ce niveau d'exposition est-il dangereux pour l'oreille ? La détection de Ω_{s_1} permet de s'assurer du bon fonctionnement de l'audition chez les nouveau-nés.

★ ★
★